Formale Begriffsanalyse
(B. Ganter, R. Wille)
Teil 3

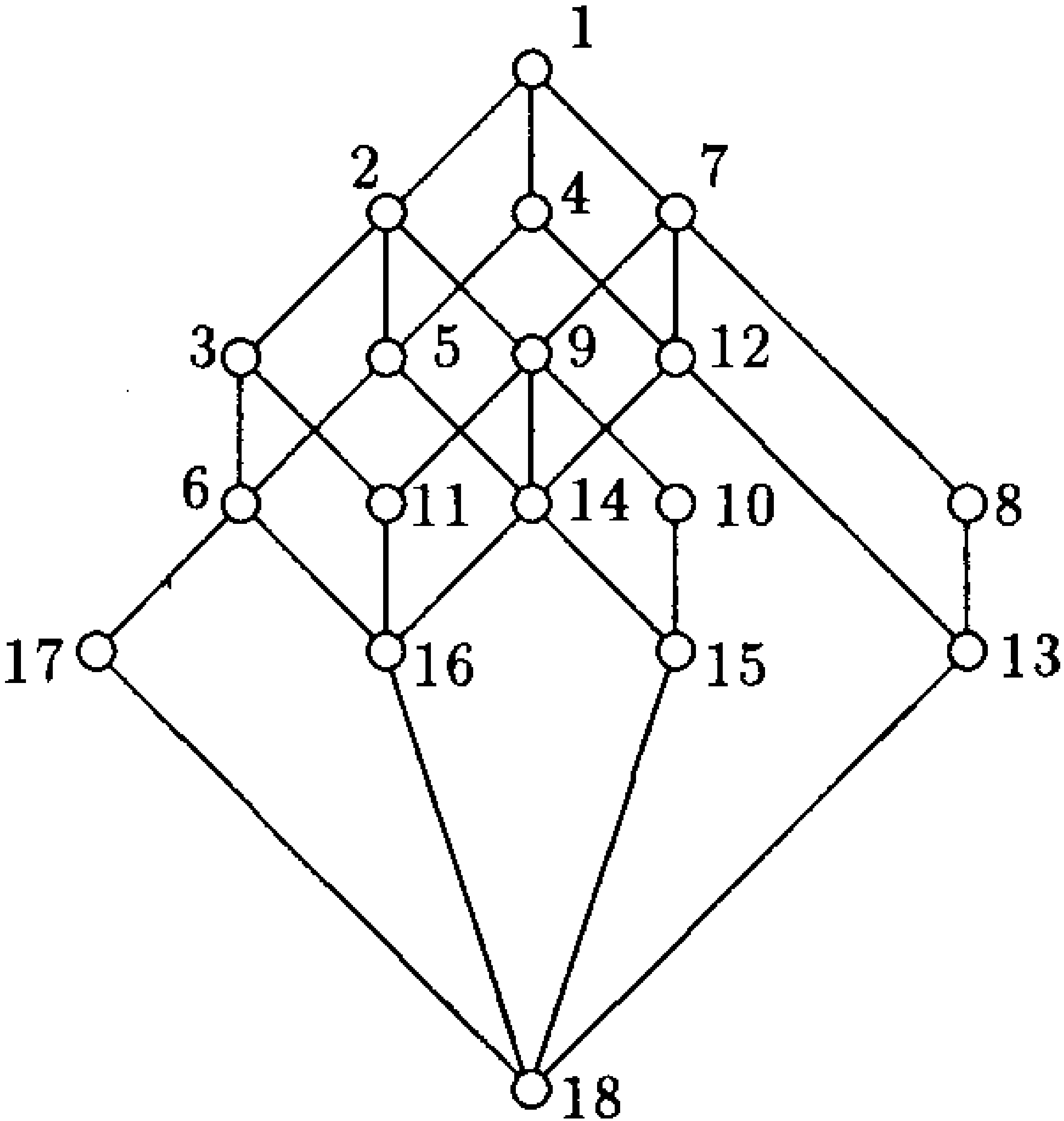
Diagramme, Implikationen

Was macht Diagramme so interessant?

- Diagramme beinhalten die volle Information des Kontextes.
- Visualisierung von Information.
- Strukturelle Einsichten werden sichtbar; Möglichkeit zur Hypothesenbildung.
  - Implikationen sind ablesbar.
  - Hierarchie ist sichtbar.

Regeln zur Erzeugung von „schönen“ Diagrammen

- Parallelogrammregel: bilde Parallelogramme!
- Geradenregel: bilde mölgichst lange Geraden!
- Positionierungsregel: gilt P<Q, dann sollte P auf der Zeichenebene unterhalb von Q liegen.
- Vermeide Kantenkreuzungen!
- Zeichne in Schichten!


1
2
4
7
3
5
9
12
6
11
14
10
8
17
16
15
13
18

Algorithmus zur (interaktiven) Erstellung von Diagrammen

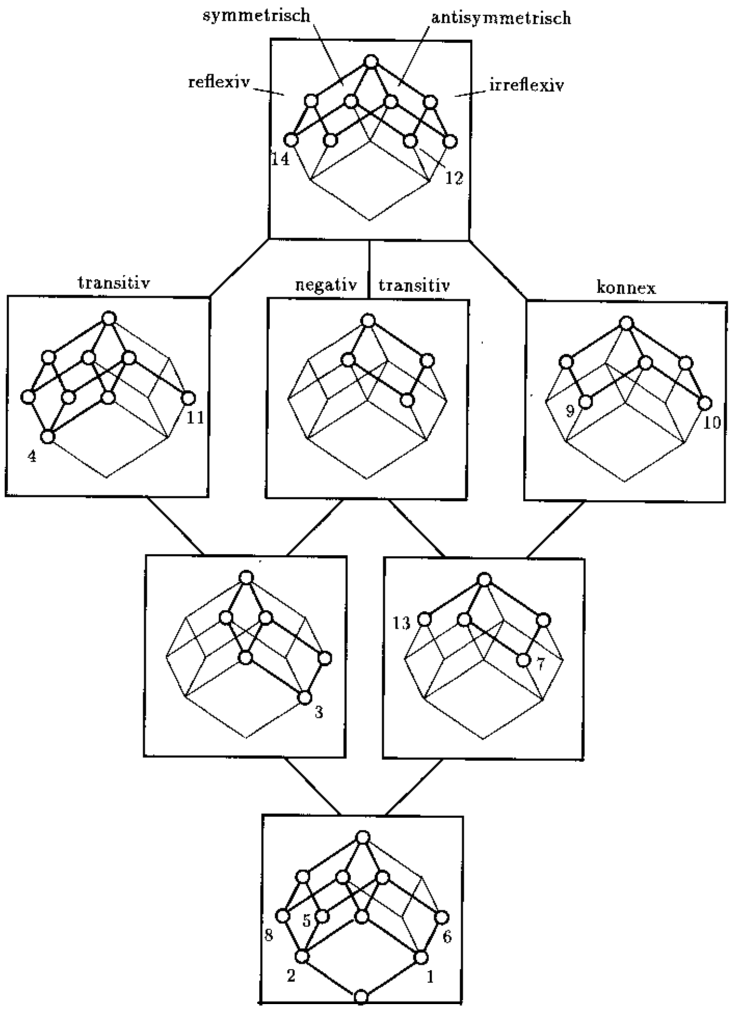
- Sei $X := G \dot{\cup} M$, dann ist $\operatorname{dar} : (A, B) \mapsto A \cup (M \setminus B)$ eine Ordnungseinbettung von (B(G,M,I),≤) in $\mathcal{P}$(X).
- Wähle eine Gitterprojektion $\operatorname{vec} : X \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$
- $\operatorname{pos} p := n + \sum_{x \in \operatorname{dar} p} \operatorname{vec} x$ liefert dann eine Positionierung der Begriffe p in der Zeichenebene.

Additives Liniendiagramm

- Vorsicht: Die beschriebene Positionierung der Begriffe ist nicht notwendig injektiv!!!
- Wählt man eine geeignete Gitterprojektion, sodaß die Positionierung injektiv ist, erhält man ein additives Liniendiagramm.
- Die Lage der Gegenstandsbegriffe läßt sich aus den, zu den entsprechenden Merkmalen gehörenden Vektoren berechnen.
- Implementierung: z.B. Diagram

Bessere Lesbarkeit bei größeren Diagrammen

Gestuftes Liniendiagramm:



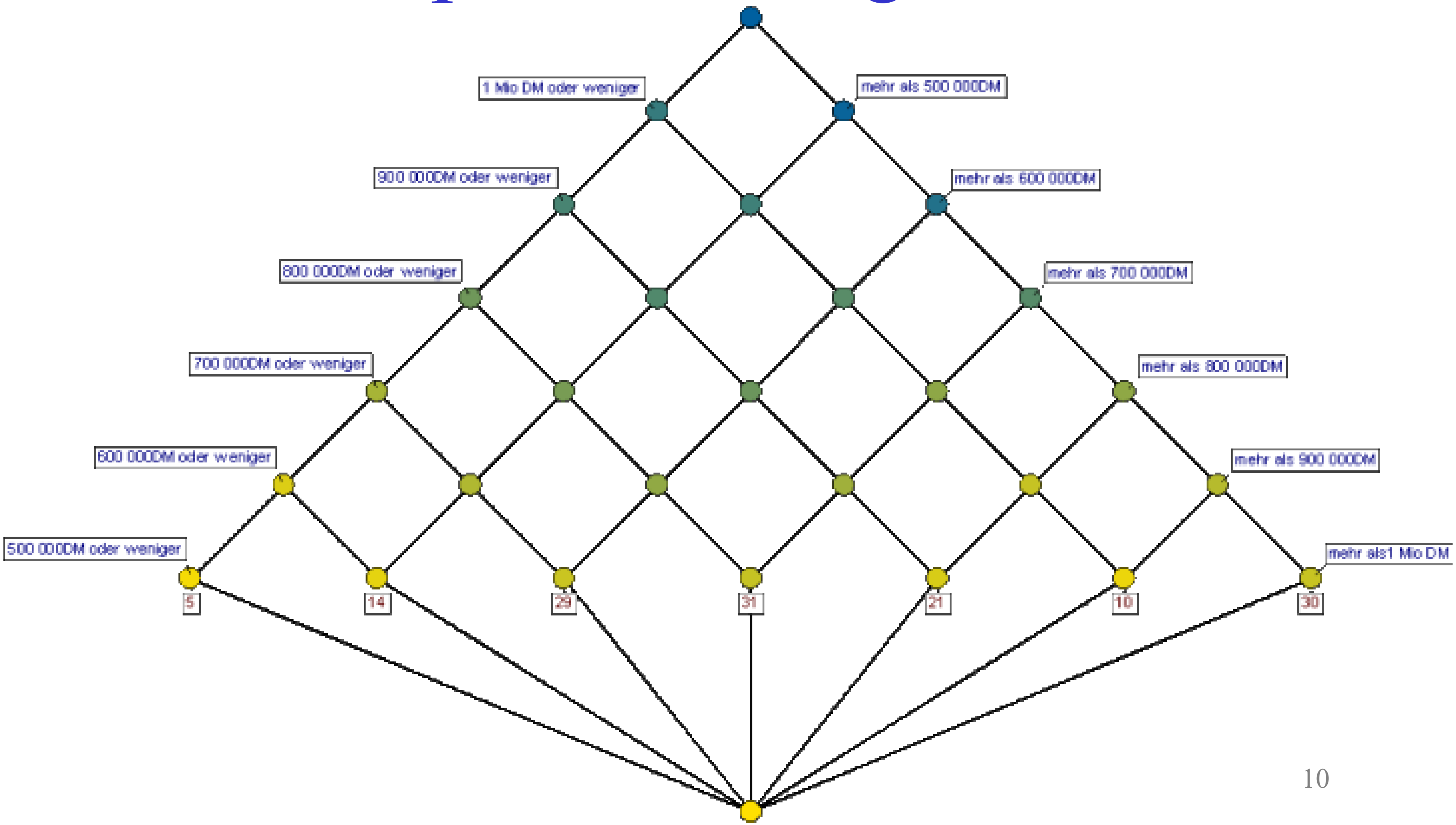
Wie wird ein gestuftes Liniendiagramm gelesen?

- Ein gestuftes Liniendiagramm besteht aus abgegrenzten Feldern.
- Eine einfache Linie zwischen zwei Feldern zeigt an, dass alle Knotenpunkte, die bei der Verschiebung des einen Feldes auf das andere zusammenfallen, im gewöhnlichen Liniendiagramm verbunden sind.
- Enthalten die verbundenen Felder nur Teile einer kongruenten Figur, wird die kongruente „Hintergrundstruktur“ zusätzlich eingezeichnet.

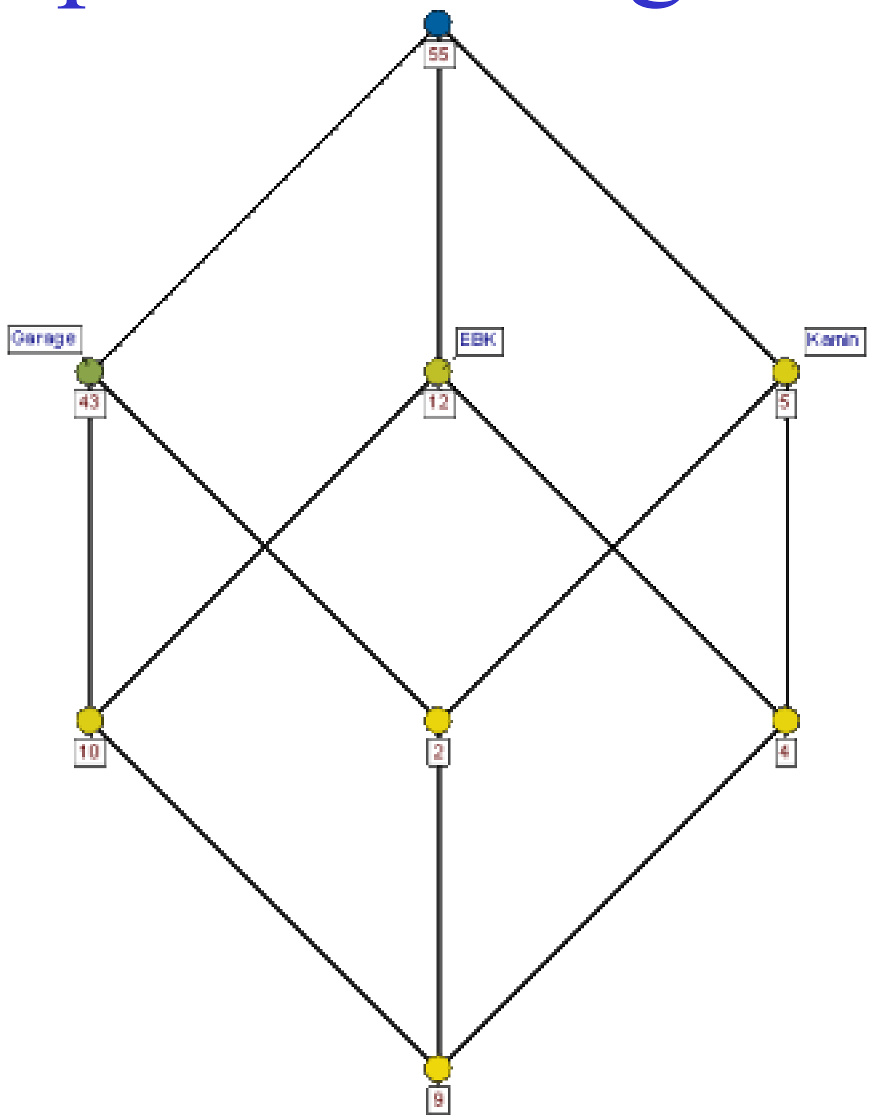
Wie entsteht ein gestuftes Liniendiagramm?

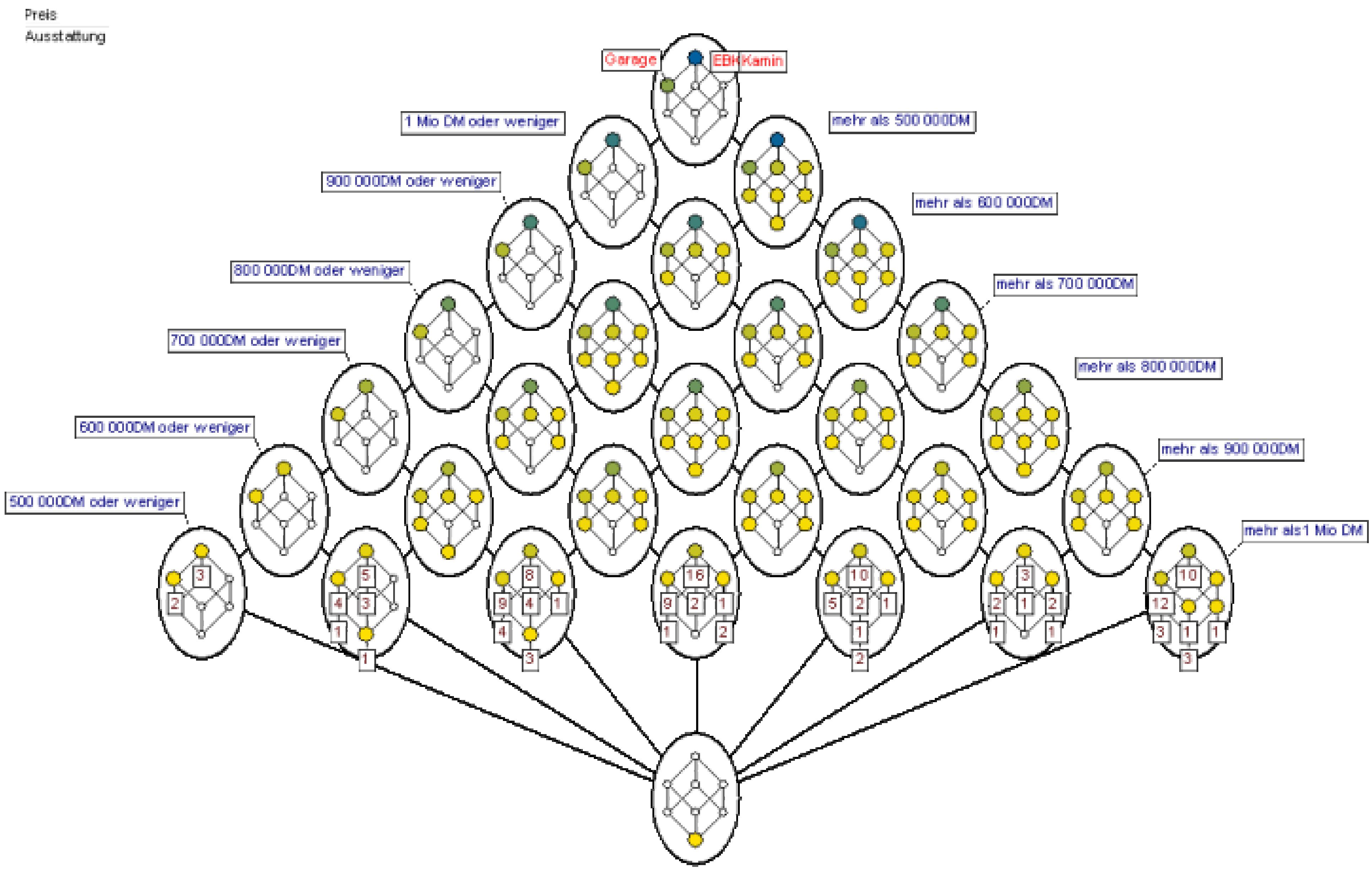
- Teile die Merkmalsmenge in zwei nicht notwendigerweise disjunkte Teilmengen (möglichst bedeutungstragend).
- Zeichne zu beiden Teilmengen die zugehörigen Liniendiagramme.
- Ersetze in einem der Diagramme die Knotenpunkte durch Kästen, in die du jeweils eine Kopie des zweiten Diagramms zeichnest, achte darauf, welche Knotenpunkte tatsächlich besetzt sind.

Beispiel: Teildiagramm 1



Beispiel: Teildiagramm 2





Preis
Ausstattung
Garage
EBK
Kamin
1 Mio DM oder weniger
mehr als 500 000DM
900 000DM oder weniger
mehr als 600 000DM
800 000DM oder weniger
mehr als 700 000DM
700 000DM oder weniger
mehr als 800 000DM
600 000DM oder weniger
mehr als 900 000DM
500 000DM oder weniger
mehr als1 Mio DM

Erzeugung von Kontexten aus Implikationen

- Es ist möglich einen Kontext aus der Merkmallogik zu erschließen und umgekehrt.

$\Rightarrow$ Die Menge der Implikationen eines Kontextes enthält dieselbe Information wie der Kontext selbst.

- Manchmal wissen wir mehr über die Implikationen eines Kontextes als über seine Gegenstände/Merkmale. ConImp erlaubt es, den Kontext interaktiv aus den Implikationen zu erstellen (Merkmalexploration).

Interaktives Erstellen eines Auswahlkontextes

- gegeben:
  - umfangreiches, nicht strukturiertes Wissen über ein Sachgebiet;
  - Menge von Eigenschaften (Merkmalen);
  - Gegenstandsbereich (Universum).
- gesucht:

  minimale Teilmenge des Gegenstandsbereichs, für die genau die Merkmalsimplikationen des gesamten Universums gelten („trennende Beispiele“, „vollständiger Auswahlkontext“ ≅ Kontext).

Interaktives Erstellen eines Kontextes mit ConImp
Beispiel: Vierecke

- Gebe Merkmale an, die Vierecke charakterisieren
  ($a=b$, $a||c$, $a \perp b$, ...).
- ConImp fragt Implikationen ab.
  ($a||c \wedge b||d \rightarrow a=c \wedge b=d$?)
- bestätige gültige Implikationen (beweisbar).
- ist die Implikation ungültig, konstruiere ein Gegenbeispiel.
  ($a||c \wedge b=d \rightarrow a=c$? Nein, denn $\{(0,0),(0,4),(1,1),(3,1)\}$)

Formale Definition von Implikationen

Def: Sei $A,B \subseteq M$, $T \subseteq M$ respektiert eine Implikation $A \to B$, wenn $A \not\subseteq T$ oder $B \subseteq T$

ist. $A \to B$ gilt in einem Kontext (G,M,I), wenn sie im System der Gegenstandsinhalte gilt. A heißt dann Prämisse für B.

Satz: Eine Implikation $A \to B$ gilt in (G,M,I) genau dann, wenn $B \subset A''$ ist.

Wie lassen sich die Implikationen am Begriffsverband ablesen?

- $A \to m$ gilt genau dann, wenn $(m', m'') \geq (A', A'')$ ($\Leftrightarrow \mu m \geq \wedge\{\mu n | n \in A\}$).
- Man muß also prüfen, ob im Diagramm der mit m bezeichnete Begriff über dem Infimum aller mit einem n aus A bezeichneten Begriffe liegt.

Die Menge der Implikationen

- Eine Implikation $A \to B$ folgt semantisch aus einer Menge $\mathcal{L}$ von Implikationen, falls jede Teilmenge von M, die $\mathcal{L}$ respektiert, auch $A \to B$ respektiert.
- $\mathcal{L}$ heißt abgeschlossen, wenn sie alle Implikationen des Kontextes (G,M,I) enthält.
- $\mathcal{L}$ heißt vollständig, wenn jede Implikation von (G,M,I) aus $\mathcal{L}$ folgt.

Welche Implikationen sind notwendig, um einen Kontext wiederzugeben?

- Einige Implikationen sind trivial oder ergeben sich offensichtlich aus anderen:
  - $A \to B$ gilt stets, wenn $B \subseteq A$
  - wenn $A \to B$ und $C \subseteq B$, dann $A \to C$
  - aus $A_j \to B_j$ für $j \in J$, folgt $\bigcup_{j \in J} A_j \to \bigcup_{j \in J} B_j$
- eliminiert man diese Implikationen, bleiben die Implikationen mit echter Prämisse übrig, diese Menge ist vollständig.

$A \subseteq M$ ist echte Prämisse, wenn $\emptyset \neq A^{\bullet} := A'' \setminus (A \cup \bigcup_{n \in A} (A \setminus \{n\})'')$

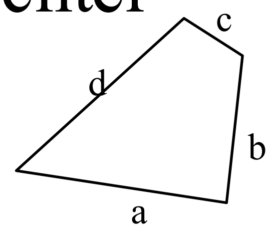
Stammbasis (Duquenne-Guigues-Basis)

- Eine Menge $\mathcal{L}$ von Implikationen heißt nichtredundant, wenn keine der Implikationen aus den anderen folgt.
- Eine nichtredundante vollständige Menge $\mathcal{L}$ bildet eine Basis.
- Die Menge L:= $\{P \rightarrow (P''\setminus P) \mid P \text{ Pseudoinhalt}\}$ bildet eine Basis (Stammbasis).

P⊆M heißt Pseudoinhalt, wenn P≠P'' und für jeden Pseudoinhalt Q⊆P, Q≠P bereits Q''⊆P gilt.

Noch einmal die Vierecke:

- Aus der Liste der Implikationen mit echter Prämisse ist die Menge aller gültigen Implikationen leichter abzulesen, als aus der Stammbasis.
  - Bsp: c=d, b=d ⇒ a=b, a=c, a||c, b||d.



Implikationen mit echter Prämisse

1 :	c=d	==>	a=b
2 :	a=b	==>	c=d
3 :	b=d	==>	a||c
4 :	b||d	==>	a||c a=c b=d
5 :	a=c	==>	a||c b||d b=d
6 :	a senk b	==>	a||c b||d a=c b=d
7 :	c=d b=d	==>	b||d a=c
8 :	a=b b=d	==>	b||d a=c
9 :	a||c c=d	==>	b||d a=c b=d
10 :	a||c a=b	==>	b||d a=c b=d

Stammbasis

1 :	a senk b	==>	a||c b||d a=c b=d
2 :	b=d	==>	a||c
3 :	a=c	==>	a||c b||d b=d
4 :	c=d	==>	a=b
5 :	a=b	==>	c=d
6 :	b||d	==>	a||c a=c b=d
7 :	a||c a=b c=d	==>	b||d a=c b=d

Weitere interessante Themen:

- Abhängigkeiten zwischen Merkmalen in mehrwertigen Kontexten.
- Repräsentation von unvollständigem Wissen in Kontexten mit Hilfe einer dreiwertigen Kleene-Logik (ConImp).
- Partielle Implikationen
- Fuzzy-Begriffe zur Analyse unscharfer Daten.
- komplementärer und dichotomer Kontext

nichtkommerzielle Implementierungen

- ConImp
  - Begriffe berechnen (Vorgänger, Nachfolger, ...)
  - Implikationen (Stammbasis, echte Prämissen, ...)
  - ...
- Diagram
  - additive Liniendiagramme zeichnen
  - gestufte Liniendiagramme
- MBA
  - mehrwertige Kontexte

kommerzielle Implementierungen

- Softwarepaket der Firma NaviCon:

  http://www.navicon.de/default.htm

  - Cernato
    - Dateieingabe, Verwaltung, Bearbeitung
    - begriffliche Strukturierung
  - Toscana
    - Diagrammbrowser
    - grafische Analyse
  - Anaconda
    - Diagrammedition

Literatur

- B. Ganter, R. Wille: Formale Begriffsanalyse: Mathematische Grundlagen. Springer-Verlag, Heidelberg, 1996.
- S. Pollandt: Fuzzy-Begriffe: Formale Begriffsanalyse unscharfer Daten. Springer-Verlag, Heidelberg, 1997.
- R. Wille, M. Zickwolff (Hrsg.), Begriffliche Wissensverarbeitung. Mannheim: B.I.-Wissenschaftsverlag, 1994.
- R. Wille, Bedeutungen von Begriffsverbänden. In: B. Ganter, R. Wille & E. Wolff (Hrsg.), Beiträge zur Begriffsanalyse. Mannheim: B.I.-Wissenschaftsverlag, 1987, 161-211.