

Mathematische Grundlagen der Computerlinguistik

Algebren

Dozentin: Wiebke Petersen

5. Foliensatz

Algebren (algebraische Strukturen)

Eine **Algebra** \mathbf{A} ist eine Menge A zusammen mit einer oder mehreren n -stelligen **Operationen** (Verknüpfungen) f_j .

In diesem Kurs beschränken wir uns auf Algebren mit ein oder zwei binären Operationen.

Die Operationen einer Algebra müssen die folgenden Axiome erfüllen:

Abgeschlossenheit: A ist unter der Operation \otimes abgeschlossen, d.h. für beliebige $a, b \in A$ gibt es ein Element $c \in A$, sodass $a \otimes b = c$.

Eindeutigkeit: Wenn $a = a'$ und $b = b'$, dann gilt $a \otimes b = a' \otimes b'$.

Algebren (algebraische Strukturen)

Eine **Algebra** \mathbf{A} ist eine Menge A zusammen mit einer oder mehreren n -stelligen **Operationen** (Verknüpfungen) f_j .

In diesem Kurs beschränken wir uns auf Algebren mit ein oder zwei binären Operationen.

Die Operationen einer Algebra müssen die folgenden Axiome erfüllen:

Abgeschlossenheit: A ist unter der Operation \otimes abgeschlossen, d.h. für beliebige $a, b \in A$ gibt es ein Element $c \in A$, sodass $a \otimes b = c$.

Eindeutigkeit: Wenn $a = a'$ und $b = b'$, dann gilt $a \otimes b = a' \otimes b'$.

An was erinnern Sie die beiden Axiome?

Algebren (algebraische Strukturen)

Eine **Algebra** \mathbf{A} ist eine Menge A zusammen mit einer oder mehreren n -stelligen **Operationen** (Verknüpfungen) f_j .

In diesem Kurs beschränken wir uns auf Algebren mit ein oder zwei binären Operationen.

Die Operationen einer Algebra müssen die folgenden Axiome erfüllen:

Abgeschlossenheit: A ist unter der Operation \otimes abgeschlossen, d.h. für beliebige $a, b \in A$ gibt es ein Element $c \in A$, sodass $a \otimes b = c$.

Eindeutigkeit: Wenn $a = a'$ und $b = b'$, dann gilt $a \otimes b = a' \otimes b'$.

An was erinnern Sie die beiden Axiome?

Alternative Definition: Eine Algebra \mathbf{A} ist eine Menge A zusammen mit einer oder mehreren n -stelligen Funktionen $f_j : A^n \rightarrow A$.

Eigenschaften von Operationen

Assoziativgesetz

Eine Operation \otimes auf A ist **assoziativ**, g.d.w. für alle $a, b, c \in A$ gilt:

$$a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$$

Kommutativgesetz

Eine Operation \otimes auf A ist **kommutativ**, g.d.w. für alle $a, b \in A$ gilt:

$$a \otimes b = b \otimes a$$

Idempotenzgesetz

Eine Operation \otimes auf A ist **idempotent**, g.d.w. für alle $a \in A$ gilt:

$$a \otimes a = a$$

Distributivgesetz

Für zwei Operationen \oplus und \otimes auf A **distributiert** \oplus über \otimes , g.d.w. für alle $a, b, c \in A$ gilt:

$$a \oplus (b \otimes c) = (a \oplus b) \otimes (a \oplus c)$$

neutrale und inverse Elemente

neutrales Element

Gegeben eine Operation \oplus auf A . Ein Element $e \in A$ ist das **neutrale Element** von \oplus , g.d.w. für alle a in A gilt:

$$e \oplus a = a \oplus e = a.$$

inverses Element

Gegeben eine Operation \oplus auf A mit neutralem Element e . Ein Element $a^{-1} \in A$ ist das **inverse Element** eines Elements $a \in A$, g.d.w.:

$$a^{-1} \oplus a = a \oplus a^{-1} = e$$

Bsp: Drehungen eines gleichseitigen Dreiecks

$((\Delta_D, \circ))$

Grundmenge: $\Delta_D = \{id, \curvearrowright, \curvearrowleft\}$

(id: 0°-Drehung; \curvearrowright : 120°-Drehung nach rechts; \curvearrowleft : 120°-Drehung nach links)

Operation: \circ Hintereinanderausführung der Drehungen.

\circ	id	\curvearrowright	\curvearrowleft
id			
\curvearrowright			
\curvearrowleft			

- neutrales Element:
- inverse Elemente:
- Eigenschaften von \circ :

Bsp: Drehungen eines gleichseitigen Dreiecks

$((\Delta_D, \circ))$

Grundmenge: $\Delta_D = \{id, \curvearrowright, \curvearrowleft\}$

(id: 0°-Drehung; \curvearrowright : 120°-Drehung nach rechts; \curvearrowleft : 120°-Drehung nach links)

Operation: \circ Hintereinanderausführung der Drehungen.

\circ	id	\curvearrowright	\curvearrowleft
id	id	\curvearrowright	\curvearrowleft
\curvearrowright	\curvearrowright	\curvearrowleft	id
\curvearrowleft	\curvearrowleft	id	\curvearrowright

- neutrales Element:
- inverse Elemente:
- Eigenschaften von \circ :

Bsp: Drehungen eines gleichseitigen Dreiecks

$((\Delta_D, \circ))$

Grundmenge: $\Delta_D = \{id, \curvearrowright, \curvearrowleft\}$

(id: 0°-Drehung; \curvearrowright : 120°-Drehung nach rechts; \curvearrowleft : 120°-Drehung nach links)

Operation: \circ Hintereinanderausführung der Drehungen.

\circ	id	\curvearrowright	\curvearrowleft
id	id	\curvearrowright	\curvearrowleft
\curvearrowright	\curvearrowright	\curvearrowleft	id
\curvearrowleft	\curvearrowleft	id	\curvearrowright

- neutrales Element: id
- inverse Elemente: $id^{-1} = id$; $\curvearrowright^{-1} = \curvearrowleft$; $\curvearrowleft^{-1} = \curvearrowright$
- Eigenschaften von \circ : assoziativ, kommutativ

Bsp: Drehungen und horizontale Spiegelung eines gleichseitigen Dreiecks

Grundmenge: $\{id, \curvearrowright, \curvearrowleft, \leftrightarrow\}$

(id : 0° -Drehung; \curvearrowright : 120° -Drehung nach rechts; \curvearrowleft : 120° -Drehung nach links, \leftrightarrow : horizontale Spiegelung)

Operation: \circ Hintereinanderausführung der Drehungen und Spiegelungen.

Bsp: Drehungen und horizontale Spiegelung eines gleichseitigen Dreiecks

Grundmenge: $\{id, \curvearrowright, \curvearrowleft, \leftrightarrow\}$

(id : 0° -Drehung; \curvearrowright : 120° -Drehung nach rechts; \curvearrowleft : 120° -Drehung nach links, \leftrightarrow : horizontale Spiegelung)

Operation: \circ Hintereinanderausführung der Drehungen und Spiegelungen.

Diese Struktur bildet keine Algebra, da u.a. $\leftrightarrow \circ \curvearrowright$ kein Element der Grundmenge ist (Verletzung der Abgeschlossenheit).

Bsp: Drehungen und horizontale Spiegelung eines gleichseitigen Dreiecks

Grundmenge: $\{id, \curvearrowright, \curvearrowleft, \leftrightarrow\}$

(id : 0° -Drehung; \curvearrowright : 120° -Drehung nach rechts; \curvearrowleft : 120° -Drehung nach links, \leftrightarrow : horizontale Spiegelung)

Operation: \circ Hintereinanderausführung der Drehungen und Spiegelungen.

Diese Struktur bildet keine Algebra, da u.a. $\leftrightarrow \circ \curvearrowright$ kein Element der Grundmenge ist (Verletzung der Abgeschlossenheit).

Wenn man alle drei Spiegelungen entlang aller drei Spiegelachsen hinzunimmt, erhält man wieder eine Algebra.

Beispiel: Restklassen modulo 3 ($(\mathbb{N} \bmod 3, \oplus_3)$)

Grundmenge: $\{[0], [1], [2]\}$

Operation: \oplus_3 : Summe modulo 3

\oplus_3	[0]	[1]	[2]
[0]			
[1]			
[2]			

- neutrales Element:
- inverse Elemente:
- Eigenschaften von \oplus_3 :

Beispiel: Restklassen modulo 3 ($(\mathbb{N} \bmod 3, \oplus_3)$)

Grundmenge: $\{[0], [1], [2]\}$

Operation: \oplus_3 : Summe modulo 3

\oplus_3	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[1]	[2]
[1]	[1]	[2]	[0]
[2]	[2]	[0]	[1]

- neutrales Element:
- inverse Elemente:
- Eigenschaften von \oplus_3 :

Beispiel: Restklassen modulo 3 ($(\mathbb{N} \bmod 3, \oplus_3)$)

Grundmenge: $\{[0], [1], [2]\}$

Operation: \oplus_3 : Summe modulo 3

\oplus_3	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[1]	[2]
[1]	[1]	[2]	[0]
[2]	[2]	[0]	[1]

- neutrales Element: $[0]$
- inverse Elemente: $[0]^{-1} = [0]$; $[1]^{-1} = [2]$; $[2]^{-1} = [1]$
- Eigenschaften von \oplus_3 : assoziativ, kommutativ

weitere Beispiele für Algebren

- $(\mathbb{N}_0, +)$
- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$
- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$
- $(\mathcal{POT}(M), \cap, \cup)$
- (Σ^*, \circ)

Morphismen

Morphismus

Ein **Morphismus** ($\varphi: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$) von einer Algebra \mathbf{A} in eine Algebra \mathbf{B} ist eine Abbildung, die zum einen eine Funktion von der Menge der ersten in die Menge der zweiten Algebra definiert ($F: A \rightarrow B$), und zum anderen die Operationen der ersten Algebra auf die zweite Algebra projiziert (hierzu müssen beide Algebren gleichviele Operationen gleicher Stelligkeit haben).

Homomorphismus

Gegeben zwei Algebren $\mathbf{A} = (A, \oplus, \otimes)$ und $\mathbf{B} = (B, \star, \circ)$. Ein Morphismus $\varphi: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ ist ein **Homomorphismus**, g.d.w. für alle x, y in A gilt:

$$\begin{aligned}\varphi(x) \star \varphi(y) &= \varphi(x \oplus y) \text{ und} \\ \varphi(x) \circ \varphi(y) &= \varphi(x \otimes y)\end{aligned}$$

Isomorphismus

Gegeben zwei Algebren $\mathbf{A} = (A, \oplus, \otimes)$ und $\mathbf{B} = (B, \star, \circ)$. Ein Morphismus $\varphi : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ ist ein **Isomorphismus**, g.d.w. $\varphi : A \rightarrow B$ bijektiv ist und wenn für alle x, y in A gilt:

$$\varphi(x) \star \varphi(y) = \varphi(x \oplus y) \text{ und}$$

$$\varphi(x) \circ \varphi(y) = \varphi(x \otimes y)$$

(Isomorphismen sind also bijektive Homomorphismen)

Zwei Algebren sind **isomorph**, wenn es einen Isomorphismus zwischen ihnen gibt.

Automorphismus

Ein Automorphismus einer Algebra \mathbf{A} ist ein Isomorphismus $\varphi : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$.

Beispiele

- $\varphi: (\mathbb{N}_0, +) \rightarrow (\mathbb{N} \bmod 3, \oplus_3)$ mit $\varphi(n) = n \bmod 3$ ist ein
- $\varphi: (\mathbb{N}_0, +) \rightarrow (\{a\}^*, \circ)$ mit $\varphi(n) = a^n$ ist ein
- $\varphi: (\Delta_D, \circ) \rightarrow (\mathbb{N} \bmod 3, \oplus_3)$ mit $\varphi(\text{id}) = [0]$, $\varphi(\curvearrowright) = [1]$,
 $\varphi(\curvearrowleft) = [2]$ ist ein

Beispiele

- $\varphi: (\mathbb{N}_0, +) \rightarrow (\mathbb{N} \bmod 3, \oplus_3)$ mit $\varphi(n) = n \bmod 3$ ist ein Homomorphismus, aber kein Isomorphismus
- $\varphi: (\mathbb{N}_0, +) \rightarrow (\{a\}^*, \circ)$ mit $\varphi(n) = a^n$ ist ein Isomorphismus.
- $\varphi: (\Delta_D, \circ) \rightarrow (\mathbb{N} \bmod 3, \oplus_3)$ mit $\varphi(\text{id}) = [0]$, $\varphi(\curvearrowright) = [1]$, $\varphi(\curvearrowleft) = [2]$ ist ein Isomorphismus.

Semigruppe, Monoid, Gruppe

Semigruppe

Eine **Semigruppe** (Halbgruppe) $\mathbf{G} = (G, \otimes)$ ist eine Algebra, bestehend aus einer Menge G und einer binären Operation \otimes , die folgende Bedingungen erfüllt:

G1 \otimes ist assoziativ

Semigruppe, Monoid, Gruppe

Semigruppe

Eine **Semigruppe** (Halbgruppe) $\mathbf{G} = (G, \otimes)$ ist eine Algebra, bestehend aus einer Menge G und einer binären Operation \otimes , die folgende Bedingungen erfüllt:

G1 \otimes ist assoziativ

Monoid

Ein **Monoid** $\mathbf{G} = (G, \otimes)$ ist eine Algebra mit:

G1 \otimes ist assoziativ

G2 G enthält ein neutrales Element

Semigruppe, Monoid, Gruppe

Semigruppe

Eine **Semigruppe** (Halbgruppe) $\mathbf{G} = (G, \otimes)$ ist eine Algebra, bestehend aus einer Menge G und einer binären Operation \otimes , die folgende Bedingungen erfüllt:

G1 \otimes ist assoziativ

Monoid

Ein **Monoid** $\mathbf{G} = (G, \otimes)$ ist eine Algebra mit:

G1 \otimes ist assoziativ

G2 G enthält ein neutrales Element

Gruppe

Eine **Gruppe** $\mathbf{G} = (G, \otimes)$ ist eine Algebra mit:

G1 \otimes ist assoziativ

G2 G enthält ein neutrales Element

G3 jedes Element aus G hat ein inverses Element in G .

Beispiele

- $(\mathbb{N}, +)$ ist
- $(\mathbb{N}_0, +)$ ist
- $(\mathbb{Z}, +)$ ist
- $(\mathcal{POT}(M), \cup)$ ist
- (Σ^*, \circ) ist
- $(\mathbb{N} \bmod 3, \oplus_3)$ ist
- (Δ_D, \circ) ist

Beispiele

- $(\mathbb{N}, +)$ ist eine Semigruppe
- $(\mathbb{N}_0, +)$ ist ein Monoid
- $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe
- $(\mathcal{POT}(M), \cup)$ ist ein Monoid
- (Σ^*, \circ) ist ein Monoid
- $(\mathbb{N} \bmod 3, \oplus_3)$ ist eine Gruppe
- (Δ_D, \circ) ist eine Gruppe

Verbände

Verband: algebraische Definition

Ein **Verband** $\mathbf{V} = (V, \vee, \wedge)$ ist eine Algebra, bestehend aus einer Menge V und zwei binären Operationen \vee und \wedge , die folgende Bedingungen erfüllen:

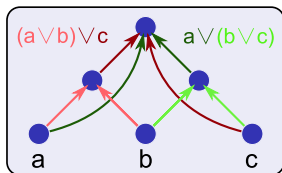
- Kommutativgesetze: $a \vee b = b \vee a$ und $a \wedge b = b \wedge a$
- Assoziativgesetze: $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ und $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$
- Idempotenzgesetze: $a \vee a = a$ und $a \wedge a = a$
- Absorptionsgesetze: $a \vee (a \wedge b) = a$ und $a \wedge (a \vee b) = a$

Verbände

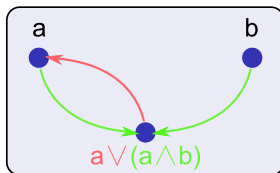
Verband: algebraische Definition

Ein **Verband** $\mathbf{V} = (V, \vee, \wedge)$ ist eine Algebra, bestehend aus einer Menge V und zwei binären Operationen \vee und \wedge , die folgende Bedingungen erfüllen:

- Kommutativgesetz: $a \vee b = b \vee a$ und $a \wedge b = b \wedge a$
- Assoziativgesetz: $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ und $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$
- Idempotenzgesetz: $a \vee a = a$ und $a \wedge a = a$
- Absorptionsgesetz: $a \vee (a \wedge b) = a$ und $a \wedge (a \vee b) = a$



$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$$



$$a \vee (a \wedge b) = a$$

Verbände

Zusammenhang algebraischer und ordnungstheoretischer Verband

- (i) $\mathbf{V} = (V, \trianglelefteq)$ sei ein (ordnungstheoretisch definierter) Verband. Setze $a \wedge b = \inf\{a, b\}$ und $a \vee b = \sup\{a, b\}$. Dann ist $\mathbf{V} = (V, \vee, \wedge)$ ein (algebraisch definierter) Verband.
- (ii) $\mathbf{V} = (V, \vee, \wedge)$ sei ein (algebraisch definierter) Verband. Setze $a \trianglelefteq b$ g.d.w. $a \wedge b = a$. Dann ist $\mathbf{V} = (V, \trianglelefteq)$ ein (ordnungstheoretisch definierter) Verband.

Beispiel: $(\mathcal{POT}(M), \subseteq)$ und $(\mathcal{POT}(M), \cup, \cap)$