Was man mit dem Pumping-Lemma für reguläre Sprachen zeigen (oder auch nicht zeigen) kann

Wiebke Petersen

Das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen besagt, dass es für jede unendliche reguläre Sprache eine Grenze n gibt, so daß es zu jedem Wort w der Sprache, das mindestens die Länge n hat, eine Zerlegung in drei Teile gibt ($w = uvw$), so dass jedes der Worte uv^iw (mit $i \geq 0$) ein Wort der Sprache ist. (Hierbei ist n die Anzahl der Zustände in einem minimalen endlichen Automaten, der die Sprache akzeptiert).

Das Pumping-Lemma macht also eine "wenn-dann-Aussage": Wenn die Sprache unendlich und regulär ist, dann müssen lange Wörter, wenn sie geeignet zerlegt werden, pumpbar sein.

Das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen besagt nicht

- dass jede beliebige Zerlegung pumpbar sein muss.

  Beispiel: Die Sprache L, die aus allen Wörtern über dem Alphabet $\{a, b\}$ mit einer ungeraden Anzahl von b's besteht ist regulär (es gibt einen endlichen Automaten mit 2 Zuständen, der die Sprache akzeptiert). Das Wort aba ist ein Wort der Sprache, allerdings ist die Zerlegung $u = a$, $v = b$, $w = a$ nicht pumpbar, da zum Beispiel $ab^2a = abba$ kein Wort der Sprache ist.

  Es gibt aber eine pumpbare Zerlegung von aba, nämlich $u = ab$, $v = a$, $w = \epsilon$.

- dass eine Sprache, die nicht regulär ist nicht pumpbar sein kann.

  Beispiel: Jedes nichtleere Wort der Sprache L_{pal} der Palindrome über dem Alphabet $\{a, b\}$ kann in seiner Mitte aufgepumpt werden. Das Wort $ababa$ ist ein Palindrom, zerlegt man es $u = ab$, $v = a$, $w = ba$, so ist jedes Wort uv^iw (mit $i \geq 1$) ein Wort der Sprache L_{pal}.

  Zur Erinnerung: Es gilt, wenn draußen die Sonne scheint ist es hell; aber aus der Tatsache, dass es hell ist, kann nicht darauf geschlossen werden, dass die Sonne scheint (eine mögliche Ursache ist künstliches Licht).

  Um zu zeigen, dass L_{pal} nicht regulär ist, kann man L_{pal} mit der regulären Sprache $L(a^*ba^*)$ schneiden, und dann zeigen, dass $L_{pal} \cap L(a^*ba^*) = L(a^nba^n)$ nicht regulär ist. Wäre L_{pal} regulär, dann müsste, da der Schnitt zweier regulärer Sprachen regulär ist, auch $L(a^nba^n)$ regulär sein. Ein Wort aus $L(a^nba^n)$ kann jedoch nicht so in u, v, w zerlegt werden, dass jedes der Worte uv^iw (mit $i \geq 1$) ein Wort von $L(a^nba^n)$ ist. Sobald bei der Zerlegung ein einziges b in v vorkommt, kommen in uv^iw für $i \geq 2$ zuviele b's vor. Kommen in v jedoch nur a's vor, so stimmt die Zahl der a's am Anfang und am Ende des Wortes nicht mehr überein.