

# **Seminar: Formale Begriffsanalyse**

## **Bestimmung aller Begriffe eines formalen Kontextes**

Dozentin: Wiebke Petersen  
petersew@uni-duesseldorf.de  
SoSe 2010

7. Foliensatz

## Hüllensysteme und Hüllenoperatoren

**Definition 1.** Ein **Hüllensystem** auf einer Menge  $G$  ist eine Menge von Teilmengen, die  $G$  enthält und gegen Durchschnitt abgeschlossen ist. Formal:  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(G)$  ist ein Hüllensystem, falls  $G \in \mathcal{A}$  ist und

$$\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap \mathcal{X} \in \mathcal{A}$$

*gilt.*

Ein Hüllenoperator  $\phi$  auf  $G$  ist eine Abbildung, die jeder Teilmenge  $X \subseteq G$  eine **Hülle**  $\phi X \subseteq G$  zuordnet, wobei gilt:

1.  $X \subseteq Y \Rightarrow \phi X \subseteq \phi Y$  (Monotonie)

2.  $X \subseteq \phi X$  (Extensivität)

3.  $\phi\phi X = \phi X$  (Idempotenz)

**Proposition 2.** Ist  $\mathcal{A}$  ein Hüllensystem auf  $G$ , so definiert

$$\phi_{\mathcal{A}}X := \bigcap \{A \in \mathcal{A} \mid X \subseteq A\}$$

einen Hüllenoperator auf  $G$ . Umgekehrt ist die Menge

$$\mathcal{A}_{\phi} := \{\phi X \mid X \subseteq G\}$$

aller Hüllen eines Hüllenoperators  $\phi$  stets ein Hüllensystem.

### Bestimmung aller Begriffe eines Kontextes:

#### Algorithmus zur Erzeugung aller Hüllen eines gegebenen Hüllenoperators

- Zur Bestimmung aller Begriffe genügt es alle Begriffsumfänge zu bestimmen (analog: alle Begriffsinhalte).
- $A \mapsto A''$  ist ein Hüllenoperator auf  $G$ .
- Zur Bestimmung aller Begriffe eines Kontextes müssen also alle Hüllen des Hüllenoperators  $A \mapsto A''$  bestimmt werden.
- Idee:
  1. definiere eine strikte lineare Ordnung auf der Potenzmenge der Gegenstandsmenge
  2. finde eine Methode um zu einer gegebenen Menge  $A \subseteq G$  den bezüglich der linearen Ordnung kleinsten Begriffsumfang nach  $A$  zu finden.
  3. die Begriffsumfänge können nun systematisch nacheinander (beginnend mit dem kleinsten Begriffsumfang) gebildet werden

### Schritt 1: lektische Ordnung der Potenzmenge

**Definition 3.** Sei  $G = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  und seien  $A, B \subseteq G$ . Dann heißt  $A$  **lektisch kleiner** als  $B$ , falls das kleinste Element, in dem sich  $A$  und  $B$  unterscheiden zu  $B$  gehört. Anders ausgedrückt:

$$A < B \text{ g.d.w. } \exists i \in B \setminus A : A \cap \{1, 2, \dots, i-1\} = B \cap \{1, 2, \dots, i-1\}.$$

$<$  definiert eine strikte lineare Ordnung auf der Potenzmenge (Menge der Teilmengen) von  $G$ .

### Schritt 2: Bestimmung des lektisch kleinsten Begriffsumfangs nach $A \subseteq G$

**Definition 4.** Definiere

$$A <_i B \text{ g.d.w. } i \in B \setminus A \text{ und } A \cap \{1, 2, \dots, i-1\} = B \cap \{1, 2, \dots, i-1\}$$

$$A \oplus_i \stackrel{\text{def}}{=} ((A \cap \{1, 2, \dots, i-1\}) \cup \{i\})''$$

**Lemma 5.** Seien  $A, B$  und  $i$  wie in der vorangegangenen Definition, dann gilt:

1.  $A < B \Leftrightarrow A <_i B$  für ein  $i \in G$ .

2.  $A <_i B$  und  $A <_j C$  mit  $i < j \Rightarrow C <_i B$ .
3.  $i \notin A \Rightarrow A < A \oplus i$ .
4.  $A <_i B$  und  $B$  Begriffsumfang  $\Rightarrow A \oplus i \subseteq B$ , d.h.  $A \oplus i \leq B$ .
5.  $A <_i B$  und  $B$  Begriffsumfang  $\Rightarrow A <_i A \oplus i$ .

**Proposition 6.** Der kleinste Begriffsumfang, der bezüglich der lektischen Ordnung größer ist als eine gegebene Menge  $A \subset G$ , ist  $A \oplus i$ , wobei  $i$  das größte Element von  $G$  ist mit  $A <_i A \oplus i$ .

## Algorithmus zur Bestimmung aller Begriffsinhalte eines Kontextes

1. Der lektisch kleinste Begriffsinhalt ist  $\emptyset''$ .
2. Ist  $A$  als Begriffsinhalt bestimmt, so findet man den lektisch nächsten Begriffsinhalt, indem man alle Merkmale  $i \in M \setminus A$  prüft, beginnend mit dem größten, und dann in absteigender Reihenfolge, bis erstmals  $A <_i (A \oplus i)''$  gilt.  $(A \oplus i)''$  ist dann der nächste Begriffsinhalt.
3. Wenn  $(A \oplus i)'' = M$  dann bist du fertig, wenn nicht, dann verwende  $(A \oplus i)''$  als neues  $A$  und mache bei (2) weiter.

### Beispiel

	fliegen (1)	schwimmen (2)	groß (3)	ziehen (4)
Storch	×		×	×
Ente	×	×		×
Spatz	×			

$A$	$i$	$A \oplus i$	$(A \oplus i)''$	$A <_i (A \oplus i)''$	neuer Inhalt