Seminar: Formale Begriffsanalyse
Begriffsverbände

Dozentin: Wiebke Petersen
petersew@uni-duesseldorf.de
SoSe 2010

4. Foliensatz

Hinweise für AP

- Die Standardleistung für eine AP ist eine Haus- bzw. Projektarbeit (Ausnahmen nur in Notfällen).
- Es bieten sich Projektarbeiten an, die die Einsatzmöglichkeiten der FBA untersuchen.
- Bitte sprechen Sie die Hausarbeitsthemen frühzeitig mit mir ab!
- Jedes Hausarbeitsthema sollte im Seminar vorgestellt werden (max. 10minütiger Vortrag):
  - Was ist das Problem?
  - Warum könnte FBA geeignet sein, dieses Problem zu lösen?
  - Welche Vorgehensweise ist geplant?
  - Zeitplan?
  - Welche Schwierigkeiten werden erwartet?

Hinweise für BN

- Auf allgemeinen Wunsch wird es keine BN-Klausur geben.
- Ein BN wird durch die regelmäßige Bearbeitung von Hausaufgaben erworben.
  - Die Hausaufgaben sind in der Regel bis zur kommenden Sitzung anzufertigen.
  - Die Hausaufgaben finden sich auf den Kursfolien.
  - Vorsicht, nur die mit *Hausaufgaben* überschriebenen Aufgaben sind Hausaufgaben (nicht zu verwechseln mit *Übungsaufgaben*).
  - Für eine AP sind die Hausaufgaben keine Pflicht, werden aber empfohlen.
- Alternative: ca. 5-6seitiges Essay.

minimales / maximales Element

Sei $(M, \leq)$ eine (partiell) geordnete Menge. Ein Element x von M ist ein

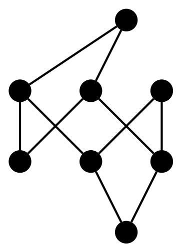
- **minimales Element** von M, g.d.w. es kein Element y von M gibt, für das $y \leq x$ und $x \neq y$ gilt.
- **maximales Element** von M, g.d.w. es kein Element y von M gibt, für das $x \leq y$ und $x \neq y$ gilt.

Minimum /Maximum

Sei $(M, \leq)$ eine (partiell) geordnete Menge. Ein Element x von M ist

- das **Minimum** von M, g.d.w. für jedes Element y von M gilt, daß $x \leq y$.
- das **Maximum** von M, g.d.w. für jedes Element y von M gilt, daß $y \leq x$.

Nicht jede geordnete Menge hat ein Maximum und / oder ein Minimum. Wenn eine geordnete Menge mehr als ein minimales bzw. maximales Element hat, dann hat sie kein Minimum bzw. Maximum.

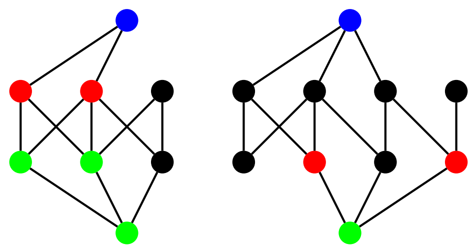


Beispiel einer geordneten Menge mit 2 minimalen und 2 maximalen Elementen, die kein Minimum und kein Maximum hat.

obere / untere Schranke

Sei $(M, \leq)$ eine (partiell) geordnete Menge und K eine Teilmenge von M. Ein Element x von M ist

- eine **obere Schranke** von K, g.d.w. $\forall y \in K : y \leq x$;
- eine **untere Schranke** von K, g.d.w. $\forall y \in K : x \leq y$.



Die Abbildungen zeigen die Hassediagramme zweier geordneter Mengen. Die rot markierten Elemente haben die blau markierten Elemente als obere und die grün markierten als untere Schranken.

kleinste obere / größte untere Schranke

x heißt **kleinste obere Schranke** oder **Supremum** von K in M, wenn x eine obere Schranke von K ist und für jede obere Schranke $y \in M$ von K mit $x \neq y$ die Ungleichung $x \leq y$ gilt. Wir schreiben $\sup K$ oder $\bigvee K$ für das Supremum von K (lese $\vee$ als '**join**').

x heißt **größte untere Schranke** oder **Infimum** von K in M, wenn x eine untere Schranke von K ist und für jede untere Schranke $y \in M$ von K mit $x \neq y$ die Ungleichung $y \leq x$ gilt. Wir schreiben $\inf K$ oder $\bigwedge K$ für das Infimum von K (lese $\wedge$ als '**meet**').

Wir schreiben $x \vee y$ statt $\bigvee\{x, y\}$ und $x \wedge y$ statt $\bigwedge\{x, y\}$.

Die Beispiele der vorangegangenen Folie zeigen, daß es geordnete Mengen M gibt, für die nicht jede Teilmenge $K \subseteq M$ ein Supremum oder Infimum hat.

Beispiele

- Für die linear geordnete Menge $(\mathbb{R}, \leq)$ gilt: $\sup[1,4] = 4$ und $\inf[1,4] = 1$.
- Für die partiell geordnete Menge $(\wp(M), \subseteq)$ mit $M = \{1,2,3,4\}$ ist das Supremum von $K = \big\{\{1,2\},\{2,4\},\{1\}\big\}$ die Vereinigung aller Elemente von K, also $\sup K = \{1,2,4\}$. Das Infimum von K ist der Durchschnitt aller Elemente von K, also $\inf K = \emptyset$.

Hausaufgaben (1)

Aufgaben:

1. Zeichne ein Hasse-Diagramm zur geordneten Menge

$$M = \Big(\{\{1,2,3,4,5\},\{1,2,3,5\},\{1,3,4\},\{2,4,5\},\{1,2,3\},$$
$$\{1,3\},\{2,4\},\{1,5\},\{1,\},\{3\},\{4\},\{5\},\emptyset\},\subseteq\Big).$$

2. Wähle eine 4-elementige Teilmenge von M und bestimme ihre oberen und unteren Schranken. Hat die Teilmenge ein Supremum und ein Infimum in M?

Verbände

Definition 1. [Verbände] *Eine geordnete Menge $(V, \leq)$ ist ein* **Verband**, *g.d.w. zu je zwei Elementen x und y aus V auch das Supremum von x und y $(x \vee y)$ und das Infimum von x und y $(x \wedge y)$ Elemente von V sind.*

Definition 2. *Ein Verband $(V, \leq)$ ist ein* **vollständiger Verband**, *falls für alle $K \subseteq V$ gilt, daß $\bigvee K \in V$ und $\bigwedge K \in V$. Jeder vollständige Verband hat ein größtes Element $\bigvee V$, das* **Einselement** *$(\mathbf{1_V})$ genannt, und ein kleinstes Element $\bigwedge V$, das* **Nullement** *$(\mathbf{0_V})$ genannt. Die oberen Nachbarn des Nullelements nennt man die* **Atome** *und die unteren Nachbarn des Einselements die* **Koatome** *des Verbands.*

Bemerkungen

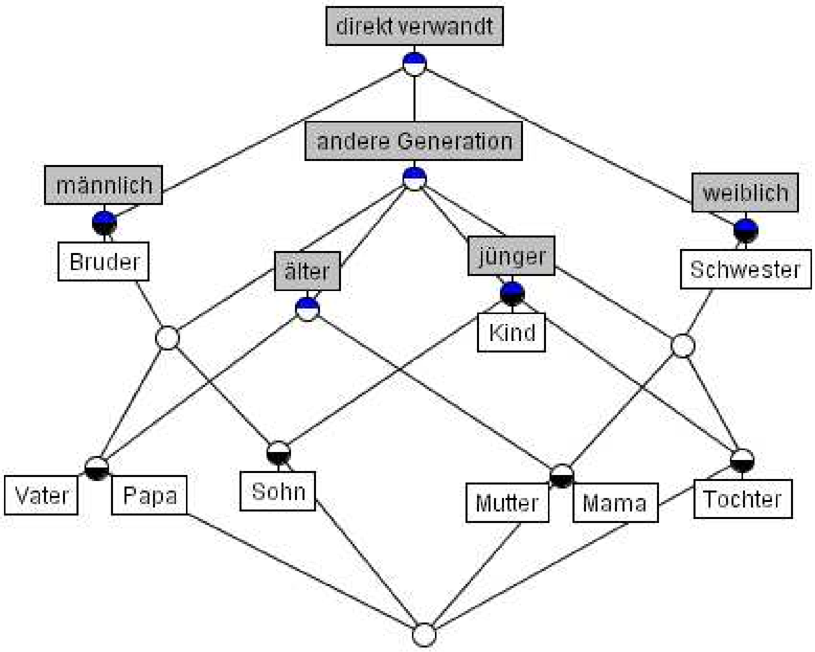
- Jeder endliche Verband ist vollständig.
- Da $\bigwedge \emptyset = 1_V$ und $\bigvee \emptyset = 0_V$ gilt, gibt es keinen vollständigen Verband mit leerer Menge V.
- Die Ordnungsrelation kann aus $\wedge$ und $\vee$ wiedergewonnen werden:
  $x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x = x \wedge y \quad \Leftrightarrow \quad x \vee y = y$
- $\vee$ und $\wedge$ sind assoziativ: $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ und $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$.

Beispiele

- $(\wp(M), \subseteq)$ ist ein vollständiger Verband, $\vee$ entspricht $\cup$ und $\wedge$ entspricht $\cap$.
- $([2,5], \leq)$ ist ein vollständiger Verband.
- $(\mathbb{R}, \leq)$ ist ein Verband, aber nicht vollständig.
- $\big(\{\{1,2\},\{2,4\},\{1\}\}, \subseteq\big)$ ist kein Verband.

Begriffsordnung

	direkt verwandt	älter	jünger	männlich	weiblich	andere Generation
Vater	×	×		×		×
Mutter	×	×			×	×
Bruder	×			×		
Schwester	×				×	
Kind	×		×			×
Sohn	×		×	×		×
Tochter	×		×		×	×
Papa	×	×		×		×
Mama	×	×			×	×



Definition 3. *Seien (A_1, B_1) und (A_2, B_2) zwei Begriffe eines formalen Kontextes mit $A_1 \subseteq A_2$ (äquivalent: $B_2 \subseteq B_1$), dann ist (A_1, B_1) ein **Unterbegriff** von (A_2, B_2) und (A_2, B_2) ein **Oberbegriff** von (A_1, B_1). Man schreibt $(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2)$ und nennt die Ordnung $\leq$ die **Begriffsordnung**.*

Hauptsatz der Formalen Begriffsanalyse

Theorem 4. *Für jeden formalen Kontext* (G, M, I) *bildet die assoziierte geordnete Menge* $(\mathcal{B}(G, M, I), \leq)$ *einen vollständigen Verband, der der* $\mathbf{Begriffsverband}$ *des formalen Kontextes genannt wird. In dem Begriffsverband sind Infimum und Supremum wie folgt beschrieben:*

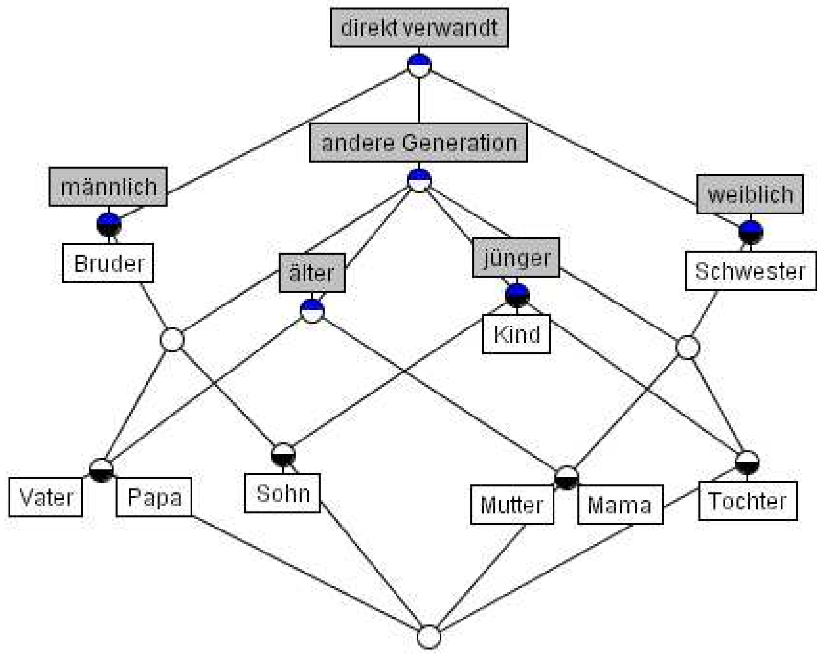
$$\bigwedge_{t \in T} (A_t, B_t) = \left(\bigcap_{t \in T} A_t, \left(\bigcup_{t \in T} B_t \right)'' \right)$$

$$\bigvee_{t \in T} (A_t, B_t) = \left(\left(\bigcup_{t \in T} A_t \right)'', \bigcap_{t \in T} B_t \right)$$

Jeder vollständige Verband ist ein Begriffsverband.

kleiner Verwandtschaftskontext

	direkt verwandt	älter	jünger	männlich	weiblich	andere Generation
Vater	×	×		×		×
Mutter	×	×			×	×
Bruder	×			×		
Schwester	×				×	
Kind	×		×			×
Sohn	×		×	×		×
Tochter	×		×		×	×
Papa	×	×		×		×
Mama	×	×			×	×



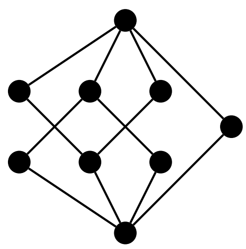
Begriffe des kleinen Verwandtschaftskontextes

	Extension									Intension					
	Vater	Mutter	Bruder	Schwester	Kind	Sohn	Tochter	Papa	Mama	direkt verwandt	älter	jünger	männlich	weiblich	andere Generation
B1	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×					
B2		×		×			×		×	×				×	
B3	×		×			×		×		×			×		
B4	×	×			×	×	×	×	×	×					×
B5	×	×						×	×	×	×				×
B6					×	×	×			×		×			×
B7		×					×		×	×				×	×
B8	×					×		×		×			×		×
B9	×							×		×	×		×		×
B10		×							×	×	×			×	×
B11						×				×		×	×		×
B12							×			×		×		×	×
B13										×	×	×	×	×	×

Hausaufgaben (2)

Aufgaben:

3. Untersuchen Sie den kleinen Verwandtschaftskontext:
   (a) Nach welchem Verfahren ist der Begriffsverband beschriftet?
   (b) Tragen Sie die Begriffsnummern aus der Begriffstabelle in das Diagramm ein.
   (c) Was könnten die unterschiedlichen Knotenarten des Diagramms bedeuten?
4. (Zusatzaufgabe, fakultativ) Ermitteln Sie einen möglichst “kleinen” (kleine Menge von Gegenständen und Merkmalen, kleine Inzidenzrelation) Kontext, der folgenden vollständigen Verband als Begriffsverband hat.



Übungsaufgaben

1. Wie ändert sich der Begriffsverband, wenn man
   (a) das Merkmal 'älter' wegläßt?
   (b) den Gegenstand 'Papa' wegläßt?
   (c) den Gegenstand 'Kind' wegläßt?
   (d) das Merkmal 'gleiche Generation' hinzunimmt?
   (e) den Gegenstand 'ältere Schwester' hinzunimmt?
2. Beweisen Sie, daß die Menge aller Begriffe eines endlichen Kontextes (ein Kontext mit endlicher Merkmal- und Gegenstandsmenge) geordnet bezüglich der Begriffsordnung einen vollständigen Verband bildet.
3. Entwickeln Sie ein systematisches Verfahren, um (möglichst effizient) die Menge aller Begriffe zu einem Kontext zu ermitteln.