Seminar: Formale Begriffsanalyse
Ordnungsrelationen und Begriffsordnung

Dozentin: Wiebke Petersen
petersew@uni-duesseldorf.de
SoSe 2010

3. Foliensatz

binäre Relation

Definition 1. *Eine* **binäre Relation** R *zwischen zwei Mengen M und N ist eine Menge von Paaren* (m, n) *mit* $m \in M$ *und* $n \in N$*, also* $R \subseteq M \times N$*.*
Statt $(m, n) \in R$ *schreibt man auch* mRn*.*
Ist $M = N$*, so ist* R *eine* **binäre Relation auf der Menge** M*.*
$R^{-1} \overset{\text{def}}{=} \{(n, m) \mid (m, n) \in R\}$ *ist die zu* R **inverse Relation**.

besondere binäre Relationen

Definition 2. *Eine binäre Relation* R *auf* M *heißt:*

reflexiv *g.d.w.* $\forall x \in M : xRx$,
irreflexiv *g.d.w.* $\forall x \in M : \neg xRx$,
symmetrisch *g.d.w.* $\forall x, y \in M$: *wenn* xRy, *dann* yRx,
asymmetrisch *g.d.w.* $\forall x, y \in M$: *wenn* xRy, *dann* $\neg yRx$,
antisymmetrisch *g.d.w.* $\forall x, y \in M$: *wenn* xRy *und* $x \neq y$, *dann* $\neg yRx$,
konnex / linear *g.d.w.* $\forall x, y \in M : xRy$ *oder* yRx *oder* $x = y$,
transitiv *g.d.w.* $\forall x, y, z \in M$: *wenn* xRy *und* yRz, *dann* xRz.

Äquivalenzrelation

Definition 3. *Eine binäre Relation* R *auf einer Menge* M *ist eine* **Äquivalenzrelation***, falls* R *reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.*
Ist R *eine Äquivalenzrelation auf* M *und* $a, b \in M$*, so schreibt man statt* aRb *auch* $a \sim_R b$ *und sagt:* a *ist äquivalent zu* b *bezüglich* R*.*
Man kann die Elemente von M *in Klassen äquivalenter Elemente einteilen; für ein Element* $a \in M$ *heißt die Klasse*

$$[a]_R \overset{\text{def}}{=} \{b : b \in M \text{ und } a \sim_R b\}$$

die **Äquivalenzklasse** *von* a *bezüglich* R*. Die Menge*

$$M/R \overset{\text{def}}{=} \{[a]_R : a \in M\}$$

aller Äquivalenzklassen von Elementen aus M *bezüglich* R *heißt* **Quotient** *von* M *bezüglich* R*.*

Eigenschaften der Äquivalenzrelation

Bemerkung: Seien a und b Elemente einer Menge M und R eine Äquivalenzrelation auf M, dann gilt:

$$[a]_R \neq \emptyset, \qquad [a]_R = [b]_R \text{ g.d.w. } a \sim_R b, \qquad a \nsim b \text{ g.d.w. } [a]_R \cap [b]_R = \emptyset.$$

Ordnungsrelationen

Definition 4. *Eine binäre Relation R auf einer Menge M ist eine*

Quasiordnung/Präordnung, *wenn sie transitiv und reflexiv ist.*

partielle Ordnung, *wenn R transitiv, reflexiv und antisymmetrisch ist.*

lineare Ordnung, *wenn sie transitiv, reflexiv und konnex ist.*

*(M, R) heißt partiell/linear ... **geordnete Menge**.*

Bemerkung: Lineare Ordnungsrelationen werden häufig mit $\leq$, bzw. partielle Ordnungsrelationen mit $\subseteq$ bezeichnet, auch wenn es sich bei der gegebenen Ordnung weder um eine numerische Größenordnung noch um die Mengeninklusion handelt.

Ordnungsrelationen

Definition 5. *Eine binäre Relation R auf einer Menge M ist eine*

Quasiordnung/Präordnung, *wenn sie transitiv und reflexiv ist.*
(Beispiel: in derselben Schulklasse sein; Äquivalenzrelationen)

partielle Ordnung, *wenn R transitiv, reflexiv und antisymmetrisch ist.*
(Beispiel: $(\wp(M), \subseteq)$)

lineare Ordnung, *wenn sie transitiv, reflexiv und konnex ist.*
(Beispiel: $(\mathbb{N}, \leq)$)

*(M, R) heißt partiell/linear ... **geordnete Menge**.*

Bemerkung: Lineare Ordnungsrelationen werden häufig mit $\leq$, bzw. partielle Ordnungsrelationen mit $\subseteq$ bezeichnet, auch wenn es sich bei der gegebenen Ordnung weder um eine numerische Größenordnung noch um die Mengeninklusion handelt.

strikte Ordnungen

Definition 6. *Eine binäre Relation R auf einer Menge M ist eine*

strikte partielle Ordnung, *wenn sie transitiv, irreflexiv und antisymmetrisch ist.*

totale / strikt lineare Ordnung, *wenn sie transitiv, irreflexiv und konnex ist.*

Bemerkung: Strikte Ordnungsrelationen werden häufig mit $<$, bzw. mit $\subset$ bezeichnet.

strikte Ordnungen

Definition 7. *Eine binäre Relation R auf einer Menge M ist eine*

strikte partielle Ordnung, *wenn sie transitiv, irreflexiv und antisymmetrisch ist.*
(Beispiel: $(\wp(M), \subset)$)

totale / strikt lineare Ordnung, *wenn sie transitiv, irreflexiv und konnex ist.*
(Beispiel: $(\wp(M), <)$)

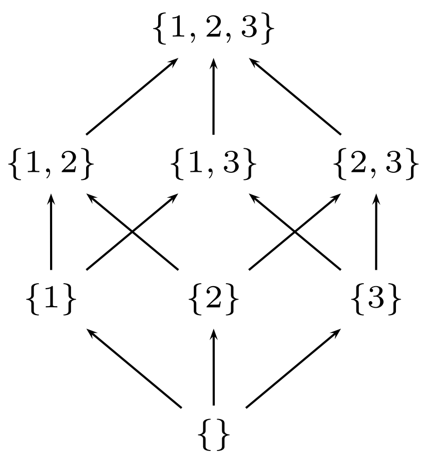
Bemerkung: Strikte Ordnungsrelationen werden häufig mit $<$, bzw. mit $\subset$ bezeichnet.

Nachbar / Hassediagramm

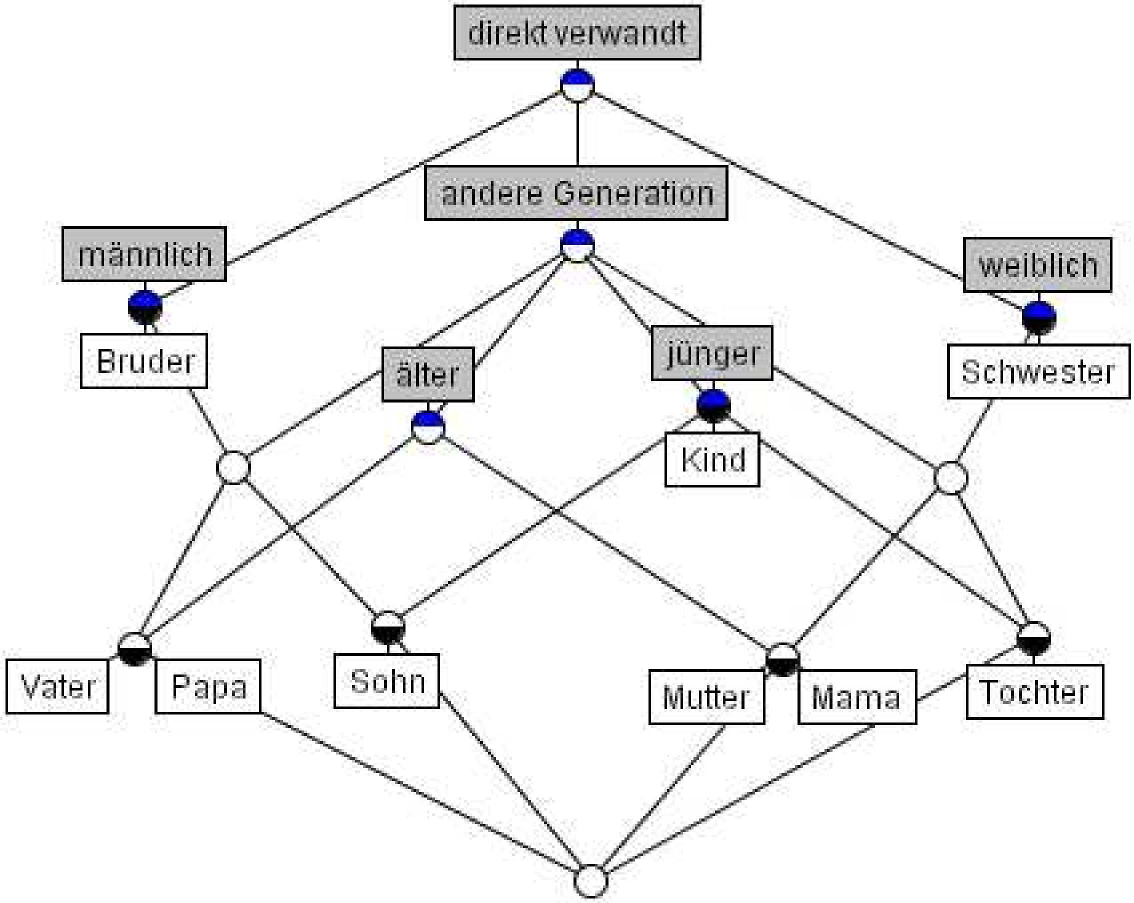
Definition 8. *Seien a und b zwei Elemente einer geordneten Menge $(M, \subseteq)$, b heißt* **oberer Nachbar** *von a g.d.w. $a \subseteq b$ und $a \neq b$ und wenn es kein von a und b verschiedenes Element c von M gibt, für das $a \subseteq c \subseteq b$ gilt. Man schreibt dann auch $\mathbf{a} \prec \mathbf{b}$.*

Bemerkung: Jede Ordnung $\subseteq$ auf einer Menge M legt eine natürliche Äquivalenzrelation '$=$' auf M fest: $\forall a, b \in M : a = b \Leftrightarrow a \subseteq b$ und $b \subseteq a$. Eine endliche geordnete Mengen $(M, \subseteq)$ kann durch ein **Hassediagramm** veranschaulicht werden; dieses erhält man, indem man für jede $=$-Äquivalenzklasse von M einen Punkt zeichnet und zwar so, daß $[a]$ unterhalb von $[b]$ liegt, wenn $a \subseteq b$. Zwei Punkte $[a]$ und $[b]$ werden mit einer Linie verbunden, wenn $a \prec b$.

Die Abbildung zeigt das Hasse-Diagramm zu $\wp(\{1, 2, 3\}, \subseteq)$:



Begriffsordnung



Definition 9. *Seien* (A_1, B_1) *und* (A_2, B_2) *zwei Begriffe eines formalen Kontextes mit* $A_1 \subseteq A_2$, *dann ist* (A_1, B_1) *ein* ***Unterbegriff*** *von* (A_2, B_2); *analog ist* (A_2, B_2) *ein* ***Oberbegriff*** *von* (A_1, B_1) *und man schreibt* $(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2)$.

Übungsaufgaben

1. Zeichne ein Hasse-Diagramm zur geordneten Menge
   $M = (\{\{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,5\}, \{1,3,4\}, \{2,4,5\}, \{1,2,3\}, \{1,3\}, \{2,4\},$
   $\{1,5\}, \{1,\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{\}\}, \subseteq)$.
2. Zeichne in das Hassediagramm der vorangegangenen Folie zu jedem Begriff die vollständige Extension und Intension ein.