Hinweise zu den Übungsaufgaben

Kontextfreie Sprachen und Pushdown-Automaten

Dozentin: Wiebke Petersen

WS 2004/2005

Aufgabe 4

Aufgabe: Gebe eine Grammatik an, die die Sprache der wohlgeformten arithmetischen Terme über dem Alphabet $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, (,), +, -, \cdot, :\}$ generiert.

Lösung:

$G_2 = \langle\{\mathsf{S}, \mathsf{Zi}, \mathsf{Za}, \mathsf{ZaS}, \mathsf{NN}\}, \{0, 1, 2, \ldots, 9, +, -, \cdot, :, (,)\}, \mathsf{S}, P\rangle$

$$P = \left\{ \begin{array}{rclrclrcl} \mathsf{S} & \rightarrow & (\ \mathsf{S}\ -\ \mathsf{S}\ ) & \mathsf{S} & \rightarrow & (\ \mathsf{S}\ +\ \mathsf{S}\ ) & \mathsf{S} & \rightarrow & (\ \mathsf{S}\ \cdot\ \mathsf{S}\ ) \\ \mathsf{S} & \rightarrow & (\ \mathsf{S}\ :\ \mathsf{S}\ ) & \mathsf{S} & \rightarrow & \mathsf{Za}, & \mathsf{Za} & \rightarrow & \mathsf{Zi} \\ \mathsf{Za} & \rightarrow & \mathsf{NN}\ \mathsf{ZaS} & \mathsf{ZaS} & \rightarrow & \mathsf{Zi} & \mathsf{ZaS} & \rightarrow & \mathsf{ZaS}\ \mathsf{Zi} \\ \mathsf{Zi} & \rightarrow & \mathsf{NN} & \mathsf{Zi} & \rightarrow & 0 & \mathsf{NN} & \rightarrow & 1 \\ \mathsf{NN} & \rightarrow & 2 & \mathsf{NN} & \rightarrow & 3 & \mathsf{NN} & \rightarrow & 4 \\ \mathsf{NN} & \rightarrow & 5 & \mathsf{NN} & \rightarrow & 6 & \mathsf{NN} & \rightarrow & 7 \\ \mathsf{NN} & \rightarrow & 8 & \mathsf{NN} & \rightarrow & 9 & & & \end{array} \right\}$$

Chomsky-Normalform

Definition 1. *Eine Grammatik ist in* **Chomsky-Normalform** *(CNF), wenn alle Regeln die Gestalt*

1. $A \rightarrow a$

2. $A \rightarrow BC$

mit $A, B, C \in T$ *und* $a \in \Sigma$ *haben (und gegebenenfalls* $S \rightarrow \epsilon$*, dann aber ohne* S *auf den rechten Regelseiten).*

Satz 2. *Jede kontextfreie Sprache kann durch eine Grammatik in Chomsky-Normalform erzeugt werden.*

Vorbereitung einer Grammatik zur Umwandlung in Chomsky-Normalform

Generiert die Grammatik ϵ, dann ersetze jedes Vorkommen von S in der Grammatik durch S' und füge die zusätzlichen Regeln $S \rightarrow S'$ und $S \rightarrow \epsilon$ hinzu.

Anschließend wende das Verfahren an, das auf den folgenden Seiten beschrieben wird.

Ansatz zur Herstellung der Regeln $X \to YZ$ und $X \to a$:

Drei Etappen:

1. **Terminalsymbole nur in Regeln der Form $X \to a$ (dann nur noch weitere Regeln $X \to X_1 \dots X_m$)**
2. **Elimination der Regeln $X \to Y$**
3. **Elimination der Regeln $X \to X_1 \dots X_m$ mit $m > 2$**

Sei die kontextfreie Grammatik $G = (N, \Sigma, P, S)$ gegeben.

Beweis (1. Etappe): Terminalsymbole sollen nur in Regeln $X \to a$ auftreten.

Beispiel: $S \to aSb \mid ab$

(Es gilt $L(G) = \{a^i b^i \mid i > 0\}$)

Gehe über zu:

$$S \to X_a S X_b \mid X_a X_b$$
$$X_a \to a$$
$$X_b \to b$$

Allgemein: Führe für jedes Terminalsymbol a ein zugehöriges Nichtterminalsymbol X_a ein.

Ersetze in allen Regeln a durch X_a. Füge Regeln $X_a \to a$ hinzu. Erhalte so die Grammatik G'.

Dann: $S \vdash_G^* a_1 \ldots a_n$ gdw. $S \vdash_{G'}^* X_{a_1} \ldots X_{a_n} \vdash_{G'}^* a_1 \ldots a_n$

Beweis (2. Etappe): **Elimination der Regeln $X \to Y$**

Bestimme alle Ableitungen $X_1 \vdash \ldots \vdash X_n$ mit Regeln der Form $X \to Y$ ohne Wiederholung eines Nichtterminalsymbols.

Dies erfasst alle Möglichkeiten, aus einem X ein Y abzuleiten.

Für jede Ableitung $X_1 \vdash \ldots \vdash X_n \vdash \alpha$ mit $\alpha \notin N$

nehme die Regel $X_1 \to \alpha$ hinzu.

Abschließend lösche alle Regeln der Form $X \to Y$ und erhalte so die Grammatik G''.

Behauptung: **G'' ist äquivalent zu G'.**

Beweis (3. Etappe):

Elimination von Regeln $X \to X_1 \dots X_m$ mit $m > 2$

Für jede Regel $X \to X_1 \dots X_m$ führe neue Hilfs-Nichtterminalsymbole $Y_1, \dots, Y_{m-2}$ ein.

Ersetze Regel $X \to X_1 \dots X_m$ durch

$$\begin{array}{rcl} X & \to & X_1 Y_1, \\ Y_1 & \to & X_2 Y_2 \\ & \vdots & \\ Y_{m-3} & \to & X_{m-2} Y_{m-2}, \\ Y_{m-2} & \to & X_{m-1} X_m \end{array}$$

Erhalte so die Grammatik G'''.

Wir zeigen für jedes Nichtterminalsymbol Z von G'':

$Z \vdash^*_{G''} w$ **gdw.** $Z \vdash^*_{G'''} w$

Beispiel

Für G mit $S \to aSb \mid ab$

ergibt sich nach 1. Etappe die Grammatik G' mit:

$$\begin{aligned} S &\to X_a S X_b \mid X_a X_b, \\ X_a &\to a, \\ X_b &\to b \end{aligned}$$

2. Etappe liefert hier keine neue Grammatik: $G' = G''$.

3. Etappe liefert die Grammatik G''' mit

$$\begin{aligned} S &\to X_a Y \mid X_a X_b, \\ Y &\to S X_b, \\ X_a &\to a, \\ X_b &\to b \end{aligned}$$