Kurzeinführung Automatentheorie

10. Dezember 2013

Automaten

Nachfolgend werden drei Typen Automaten eingeführt

- Endliche Automaten
- Kellerautomaten
- Turingmaschinen

Endliche Automaten akzeptieren reguläre Sprachen.
Kellerautomaten akzeptieren kontextfreie Sprachen.
Turingmaschinen akzeptieren rekursiv aufzählbare Sprachen.

Zentrale Konzepte der Automatentheorie

Alphabete

Ein Alphabet Σ ist eine endliche, nicht-leere Menge von Symbolen.

Zeichenreihe

Eine Zeichenreihe ist eine endliche Folge von Symbolen eines bestimmten Alphabets.
Die leere Zeichenreihe ist eine Zeichenreihe, die keine Symbole enthält.
Die Menge Σ^k ist die Menge der Zeichenreihen mit der Länge k, die aus dem Alphabet Σ stammen.
Die Menge Σ^* ist die Menge aller Zeichenreihen über Σ

Zentrale Konzepte der Automatentheorie

Sprachen

Wenn Σ ein Alphabet ist und $L \subseteq \Sigma^*$, dann ist L eine Sprache über dem Alphabet Σ.

Probleme

Ein Problem nennt man in der Automatentheorie die Frage, ob eine bestimmte Zeichenreihe in einer gegebenen Sprache enthalten ist.

Automat

Ein Automat ist ein Erkennungssystem für eine gegebene Sprache L über dem Alphabet Σ.
Die Menge aller Zeichenreihen, die ein Automat akzeptiert ist die Sprache, die ein Automat akzeptiert.

Deterministische endliche Automaten

Ein deterministischer endlicher Automat $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ besteht aus

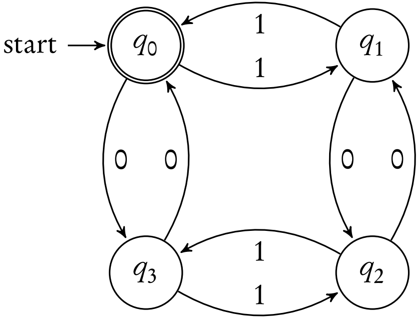
1. einer endlichen, nicht-leeren Menge von Zuständen Q
2. einem Alphabet Σ mit $Q \cap \Sigma = \emptyset$
3. einer Übergangsfunktion $\delta : Q \times \Sigma \to Q$
4. einem Startzustand $q_0 \in Q$ und
5. einer Menge Endzuständen $F \subseteq Q$

Deterministische endliche Automaten

Ein endlicher Automat für die Sprache bestehend aus einer geraden Anzahl von Nullen und einer geraden Anzahl von Einsen.

Übergangsdiagramm

Der Automat akzeptiert 10100110, aber nicht 1010011.



Nicht-deterministische endliche Automaten

Nicht-deterministische endliche Automaten haben zu einem gegebenen Zustand für jedes Eingabesymbol eine beliebige Anzahl von Übergängen zu anderen Zuständen.

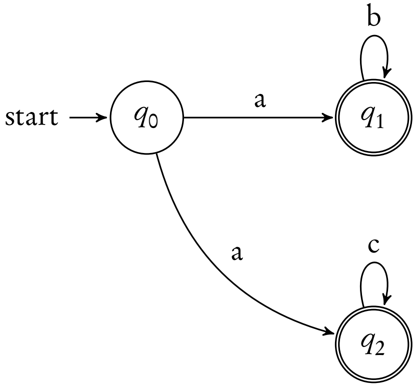


Abbildung: Nicht-deterministischer endlicher Automat für $L(ab^* + ac^*)$.

Nicht-deterministische endliche Automaten

Äquivalenter deterministischer endlicher Automat.

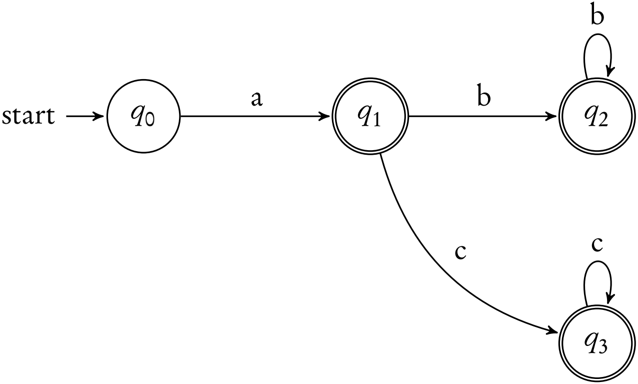


Abbildung: Deterministischer endlicher Automat für $L(ab^* + ac^*)$.

Kellerautomaten (Pushdown-Automaten)

Allgemeine Eigenschaften

Kellerautomaten entsprechen nicht-deterministischen endlichen Automaten und haben außerdem einen unbeschränkten Speicher. Kellerautomaten entstehen abweichend von nicht-deterministischen endlichen Automaten durch:

- Hinzufügens eines Kelleralphabets
- Erweiterung der Übergangsfunktion (Lesen und Ersetzen der Kellerspitze)

Kellerautomaten akzeptieren genau die kontextfreien Sprachen.

Kellerautomaten

Ein Kellerautomat $\langle A = Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F\rangle$ besteht aus

1. einer endlichen, nicht-leeren Menge von Zuständen Q
2. einem Alphabet Σ mit $Q \cap \Sigma = \emptyset$
3. einem Kelleralphabet Γ
4. einer Übergangsfunktion $\delta(q, a, X) \rightarrow (p, \gamma)$, wobei
   - $p, q \in Q$
   - $a \in \Sigma$ oder $a = \epsilon$
   - $X \in \Gamma$ und
   - $\gamma \in \Gamma$
5. einem Startzustand $q_0 \in Q$
6. ein Startsymbol Z_0 für den Kellerspeicher und
7. einer Menge Endzuständen $F \subseteq Q$

Kellerautomaten

Ein Kellerautomat für die Sprache bestehend aus der gleichen Anzahl Nullen und Einsen $L(0^n 1^n)$.

Übergangsdiagramm

Dieser Automat akzeptiert die Zeichenfolge 000111, jedoch nicht die Zeichenfolge 00011.

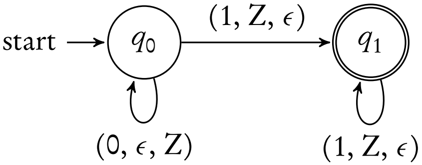


Abbildung: Kellerautomat für $L(0^n 1^n)$.

Kellerautomaten

Bewegungen

Kellerautomaten benötigen kein Eingabesymbol für Bewegungen. Bewegung ist unabhängig und auch ohne ein Symbol von der Eingabe möglich.

Akzeptieren

Man kann zeigen, dass es für eine Sprache L genau dann einen Kellerautomaten gibt,

- der sie durch Übergang in einen Endzustand akzeptiert

wenn es für L einen Kellerautomaten gibt,

- der sie durch Leeren des Kellerspeichers (Stack) akzeptiert.

Kellerautomaten

Kontextfreie Sprachen

Für das Akzeptieren einer kontextfreien Sprache, genügt regelmäßig ein Kellerautomat mit nur zwei Zuständen.

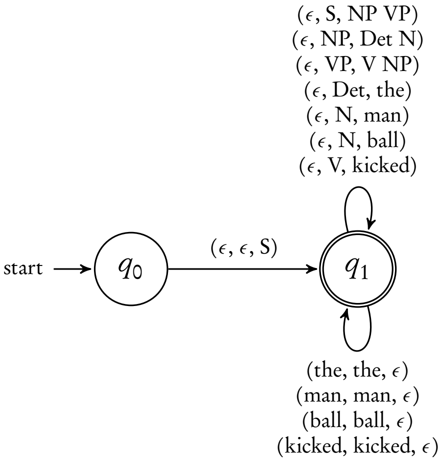
1. der Startzustand legt lediglich das Startsymbol Z_0 in den Keller
2. der akzeptierende Folgezustand
   - liest kein Eingabesymbol und expandiert Nichtterminale oder
   - liest ein Eingabesymbol und nimmt es vom Speicher

The man kicked the ball

- Det → the
- N → man
- N → ball
- V → kicked

- S → NP VP
- NP → Det N
- VP → V NP

Kellerautomaten



Turingmaschinen

Eine Turingmaschine ist ein Modell »für jede mögliche Berechnung« (Turing, 1936).
Alle bisher vorgestellten Automaten sind Turingmaschinen mit spezifischen Einschränkungen.

- Endliche Automaten sind Turingmaschinen ohne Speicher und die nur von links nach rechts lesen können
- Kellerautomaten sind Turingmaschinen, die nur von links nach rechts lesen können

Statt einem Speicher hat eine Turingmaschine ein unendlich langes Band mit Speicherzellen, welches nach links und nach rechts bewegt werden kann.
Ein Schreib-/Lesekopf liest oder schreibt je Schritt genau eine Zelle.

Turingmaschinen

Akzeptieren

Eine Turingmaschine akzeptiert eine Sprache,

- wenn sie für jedes Wort der Sprache nach endlich vielen Schritten hält und
- bei allen anderen Wörtern nicht hält oder in einem Folgezustand verbleibt.

Eine Sprache ist rekursiv aufzählbar, wenn es eine Turingmaschine gibt, die die Sprache akzeptiert.

Entscheiden

Eine Turingmaschine entscheidet eine Sprache,

- wenn sie die Sprache akzeptiert und zusätzlich
- bei allen Wörtern, die nicht aus der Sprache sind, hält.

Eine Sprache ist entscheidbar, wenn es eine Turingmaschine gibt, die die Sprache entscheidet.

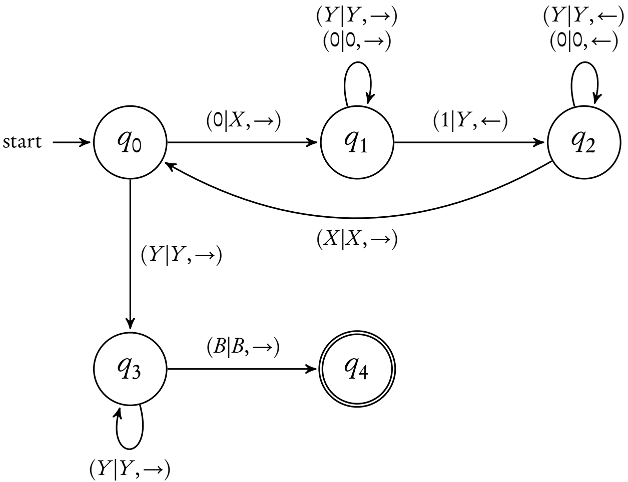
Turingmaschinen

Eine Turingmaschine $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F\rangle$ besteht aus:

1. einer endlichen, nicht-leeren Menge Q von Zuständen (der endlichen Steuerung)
2. einer endlichen Menge Σ von Eingabesymbolen (das Alphabet)
3. der vollständigen Menge der Bandsymbole Γ, wobei $\Sigma \subseteq \Gamma$
4. einer Übergangsfunktion $\delta(q, X) \rightarrow (p, Y, D)$, wobei
   - der aktuelle Zustand $q \in Q$ und ein Bandsymbol $X \in \Gamma$
   - der nächste Zustand $p \in Q$
   - das Symbol $Y \in \Gamma$, das das zuvor gelesene Symbol X überschreibt
   - die Richtung $D \in \{\leftarrow, \rightarrow\}$ der nächsten Bandbewegung
5. einem Startzustand $q_0 \in Q$
6. dem Leerzeichen $B \in \Gamma$, das in allen Zellen, in denen keine Eingabesymbole stehen, steht
7. einer Menge Endzuständen $F \in Q$

Turingmaschinen

Eine Turingmaschine für die Sprache bestehend aus der gleichen Anzahl Nullen und Einsen $L(0^n1^n)$.



Literatur

- John Hopcroft, Jeffrey Ullmann & Rajeev Motwani. Introduction to Automata Theory, Languages and Computation. 3rd Edition, 2006. Addison Wesley.