Der volle Lambek Kalkül FL, oder: Die Mutter aller Logiken

Kilian Evang, Christian Wurm

Düsseldorf, .2023

FL, zur Erinnerung

Wir präsentieren noch einmal den Kalkül FL.

Zur Erinnerung: wir haben es zu tun mit einer Logik von Sequenzen/Handlungen

Der AB-Kalkül

(ax) $\qquad \alpha \vdash \alpha$

$(\mathbf{I} - /)$ $\qquad \dfrac{\Gamma, \alpha \vdash \beta}{\Gamma \vdash \beta/\alpha}$ $\qquad (\mathbf{I} - \backslash)$ $\qquad \dfrac{\alpha, \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha\backslash\beta}$

$(/ - \mathbf{I})$ $\qquad \dfrac{\Delta, \beta, \Theta \vdash \gamma \quad \Gamma \vdash \alpha}{\Delta, \beta/\alpha, \Gamma, \Theta \vdash \gamma}$

$(\backslash - \mathbf{I})$ $\qquad \dfrac{\Delta, \beta, \Theta \vdash \gamma \quad \Gamma \vdash \alpha}{\Delta, \Gamma, \alpha\backslash\beta, \Theta \vdash \gamma}$

Lambek

$$\frac{\Gamma, \alpha, \beta, \Delta \vdash \gamma}{\Gamma, \alpha \bullet \beta, \Delta \vdash \gamma} \bullet\mathsf{I} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Delta \vdash \beta}{\Gamma, \Delta \vdash \alpha \bullet \beta} \mathsf{I}\bullet$$

$$\text{(schnitt)} \qquad \frac{\Gamma, \alpha, \Gamma' \vdash \beta \quad \Delta \vdash \alpha}{\Gamma, \Delta, \Gamma' \vdash \beta}$$

$\wedge, \vee$

$$(\vee\mathbf{I}) \quad \frac{\Gamma, \alpha, \Delta \vdash \gamma \quad \Gamma, \beta, \Delta \vdash \gamma}{\Gamma, \alpha \vee \beta, \Delta \vdash \gamma}$$

$$(\mathbf{I} \vee 1) \quad \frac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta} \qquad (\mathbf{I} \vee 2) \quad \frac{\Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta}$$

$$(\wedge\mathbf{I}1) \quad \frac{\Gamma, \alpha, \Delta \vdash \gamma}{\Gamma, \alpha \wedge \beta, \Delta \vdash \gamma} \qquad (\wedge\mathbf{I}2) \quad \frac{\Gamma, \beta, \Delta \vdash \gamma}{\Gamma, \alpha \wedge \beta, \Delta \vdash \gamma}$$

$$(\mathbf{I} - \wedge) \quad \frac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta}$$

Handlungslogik: 1 und $\perp$

$(\perp \mathbf{l})$ $\quad \Gamma, \perp \Delta \vdash \alpha$ $\qquad$ $(\mathbf{l}\top)$ $\quad \Gamma \vdash \top$

$(1\mathbf{l})$ $\quad \dfrac{\Gamma, \Delta \vdash \alpha}{\Gamma, 1, \Delta \vdash \alpha}$ $\qquad$ $(\mathbf{l}1)$ $\quad \vdash 1$

Das gibt uns den vollen Lambek-Kalkül **FL**.

Zur Erinnerung: CL

Wir erinnern uns das klassische Logik **maximalkonsistent** ist. Bedeutet:

- Nimm an, wir nehmen klassische Logik, d.h. den Kalkül $\vdash_{\mathsf{CL}}$.
- Weiterhin nehmen wir an, es gibt ein zusätzliches Theorem α, d.h. $\vdash'_{\mathsf{CL}} \alpha$
- Und dasselbe gilt für jede uniforme Substitution $\sigma(\alpha)$.
- $\Longrightarrow$ Daraus folgt alles ist ableitbar, d.h. $\vdash'_{\mathsf{CL}}$ ist inkonsistent!

Das gilt aber natürlich nicht für FL!

Substrukturelle Theorien

Für FL gilt das Gegenteil: es ist die **minimale Logik**. In welchem Sinn, was hat das zu bedeuten?

Grundprinzip

Logische Konnektoren müssen sich logisch Verhalten, sonst haben wir keine Logik. Etwas konkreter:

- Eine Implikation muss das Gesetz des Residuums (sprich MP) erfüllen für $\bullet$ bzw. $\wedge$, sonst ist sie einfach keine Implikation

Substrukturelle Theorien

- Eine Implikation muss das Gesetz des Residuums erfüllen für $\bullet$ bzw. $\wedge$, sonst ist sie einfach keine Implikation
- Ein 'und' muss die größte untere Schranke sein, sonst ist es kein 'und'
- Dual mit 'oder'
- Eine Negation $\neg$ muss erfüllen dass $\alpha \wedge \neg\alpha$ ein Widerspruch ist

Hier gibt es also begrenzten Spielraum.

Substrukturelle Theorien

Worin sich Logiken unterscheiden können sind v.a. **strukturelle Regeln**:

- Haben wir Kommutativität, d.h. $\alpha, \beta \equiv \beta, \alpha$?
- Haben wir Kontraktion, d.h. $\alpha, \alpha \Rightarrow \alpha$?
- Haben wir Expansion, d.h. $\alpha \Rightarrow \alpha, \alpha$?
- Haben wir Schwächung, d.h. $\alpha \Rightarrow \alpha, \beta$?

Hier ist CL **maximal**, d.h. es erlaubt **alles**.

FL ist **minimal**, d.h. es erlaubt **nichts**.

Substrukturelle Theorien

FL ist **minimal**, d.h. es erlaubt **nichts** – deswegen substrukturelle Logik!

Wir können nun daran gehen, strukturelle Regeln *schrittweise* wieder einzuführen. D.h. wir fragen, welche zusätzlichen Inferenzen wir erlauben können in FL, und was dabei heraus kommt.

Interessanterweise können wir strukturelle Regeln in FL **axiomatisieren**, also mittels Axiomsschemata erlauben!

Alle Logiken die wir nun betrachten sind also eigentlich nur **substrukturelle Theorien**.

Kommutativität

Z.B. könnten wir sagen: uns interessieren Ressourcen, aber nicht deren Ordnung. Das lässt sich in **FL** axiomatisieren mittels

$$(\alpha \bullet \beta)/(\beta \bullet \alpha) \tag{1}$$

(NB: das steht für eine unendliche Menge hier!)
Damit beweisen wir:

$$\frac{(q \bullet p)/(p \bullet q), p \bullet q \vdash q \bullet p \quad \vdash (q \bullet p)/(p \bullet q)}{p \bullet q \vdash q \bullet p} \text{ (schnitt)}$$

Kommutativität

Kommutativer FL ist bekannt als MALL, Multiplikative Additive Lineare Logik, die einige Aufmerksamkeit bekommen hat.

Volle Lineare Logik hat noch zus. sog. Exponenten, aber die lassen wir weg hier.

Kommutativität

Wofür ist diese Logik gut? Folgendes gilt es zu beachten:

Ressourcen

FL ist eine Logik der **Ressourcen**:

- Wenns regnet ist die Straße nass, aber davon hört der Regen nicht auf.
- Wenn ich 1euro 50 hab, kann ich mir ein Mürbchen kaufen, aber die 1euro 50 sind dann weg!

Inferenzen in **FL** sind immer *ressourcen-sensitiv*:

- α ist etwas anderes als α, α
- 1euro 50 sind ja auch was anderes als 3euro!

Kontraktion/Expansion

Wir können uns auch vorstellen, Ereignisse haben zwar eine Reihenfolge, aber keine Kardinalität.
Das lässt sich in **FL** axiomatisieren mittels

$$(\alpha \bullet \alpha)/\alpha \tag{2}$$
$$\alpha/(\alpha \bullet \alpha) \tag{3}$$

(NB: das steht für eine unendliche Menge hier!)
Damit leiten wir ab:

$$\frac{p/(p \bullet p), p \bullet p \vdash p \quad \vdash p/(p \bullet p)}{p \bullet p \vdash p} \text{ (schnitt)}$$

Kontraktion/Expansion

Wofür ist diese Logik gut? Folgendes gibt es auch zu beachten:

Reihenfolge

- Wir bekommen eine Logik der **Idempotenz**: wir können die Propositionen als **Schalter** betrachten bzw. **Zustände**.
- pqp ist nicht dasselbe wie p, aber ppp ist dasselbe wie p.
- Oder linguistischer: Propositionen sind **Aktivitäten** wie `schwimmen,laufen` etc.
- Deren Iteration ist soz. bedeutungslos

Idempotenz und Kommutativität

Betrachten wir die Logik die beides vereint.

In diesem Fall können wir Prämissen als **Mengen** betrachten, wie in klassischer Logik:

$$\alpha_1, ..., \alpha_i \vdash \beta \text{ bedeutet } \{\alpha_1, ..., \alpha_i\} \vdash \beta \tag{4}$$

denn Reihenfolge und Kardinalität spielen keine Rolle. Was aber fehlt ist die **Schwächung**:

$$p, q \vdash p \tag{5}$$

ist *nicht* ableitbar!

Relevanz

$$p, q \not\vdash p \qquad (6)$$

Hieraus folgt auch: die klassische Prämissenbelastung ist nicht gültig:

$$\alpha \not\vdash \beta \rightarrow \alpha \qquad (7)$$

(mit Kommutativität gibt es nur noch einen Pfeil). Das bedeutet soviel wie: wir bekommen eine Logik der **Relevanz**:

$$\alpha_1, ..., \alpha_i \vdash \beta \qquad (8)$$

gilt gdw.

$\alpha_1, ..., \alpha_i$ **relevant** sind für β.

Relevanz

Diese Logik wurde verwendet um der Implikation $\rightarrow$ eine “intuitive Bedeutung” zu geben:

$$\vdash \alpha \rightarrow \beta \tag{9}$$

bedeutet: α enthält relevante Information für β.

Relevanz

Man kann das mit folgenden Beispielen illustrieren:

$$\vdash \quad \alpha \to \alpha \tag{10}$$

$$\vdash \quad (\alpha \wedge \beta) \to \alpha \tag{11}$$

$$\vdash \quad \alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta) \tag{12}$$

Hingegen:

$$\nvdash \quad (\beta \to \alpha) \vee ((\neg\beta) \to \alpha) \tag{13}$$

$$\nvdash \quad \beta \to (\alpha \vee \neg\alpha) \tag{14}$$

$$\nvdash \quad \alpha \to (\beta \to \alpha) \tag{15}$$

Wir leiten also nur Implikationen ab, in denen die Konsequent soz. **abhängig** ist von der Prämisse.

Schwächung

Wir können ein weiteres Schema annehmen:

$$\vdash (\alpha \bullet \beta) \to \alpha \tag{16}$$

Damit können wir beweisen:

$$\frac{(p \bullet q) \to p, p, q \vdash p \quad (p \bullet q) \to p}{p, q \vdash p} \text{(schnitt)}$$

Schwächung

Beachte: mit dieser strukturellen Regel fallen $\wedge$ und $\bullet$ zusammen:

$$\dfrac{\dfrac{\alpha \wedge \beta \vdash \alpha \quad \alpha \wedge \beta \vdash \beta}{\alpha \wedge \beta, \alpha \wedge \beta \vdash \alpha \bullet \beta}}{\alpha \wedge \beta \vdash \alpha \bullet \beta}$$

Diese Inferenz gilt auch für Relevanz-Logik, die folgende nicht!

$$\dfrac{\dfrac{\alpha, \beta \vdash \alpha \quad \alpha, \beta \vdash \beta}{\alpha, \beta \vdash \alpha \wedge \beta}}{\alpha \bullet \beta \vdash \alpha \wedge \beta}$$

Das bedeutet: $\bullet$ braucht man nicht mehr, eine Konjunktion $\wedge$ genügt.

Schwächung: Intuitionismus

Wir können auch den Konnektor $\neg$ definieren:

$$\neg\alpha := \alpha \rightarrow \perp \tag{17}$$

Das Ergebnis ist die sog. **intuitionistische Logik**. Das ist fast klassische Logik insbesondere leiten wir ab:

$$\vdash \quad \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \tag{18}$$
$$\vdash \quad (\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg\beta) \rightarrow (\neg\alpha) \tag{19}$$
$$\vdash \quad \perp \rightarrow \alpha \tag{20}$$
$$\vdash \quad (\neg\neg\alpha) \rightarrow \alpha \tag{21}$$

Schwächung: Intuitionismus

Es gibt jedoch einen wichtigen Punkt: Intuitionismus bedeutet: wir glauben **nicht** an den **Satz vom ausgeschlossenen Dritten**:

$$\nvdash \quad (\beta \to \alpha) \vee ((\neg\beta) \to \alpha) \tag{22}$$

$$\nvdash \quad p \vee \neg p \tag{23}$$

$$\nvdash \quad (\neg\neg p) \to p \tag{24}$$

NB: in **I** ist

$$\alpha \to \beta \not\equiv \neg\alpha \vee \beta \tag{25}$$

Es gilt aber das Gesetz des Residuums:

$$\gamma \vdash \alpha \to \beta \text{ gdw. } \gamma \wedge \alpha \vdash \beta$$

Das ausgeschlossene Dritte: CL

Jetzt brauchen wir noch ein Schema, und wir bekommen CL:

$$\vdash (\neg\neg p) \to p \tag{26}$$

Und so haben wir klassische Logik, die wir kennen!

Ausblick

Das war nur ein knapper Überblick; es gibt noch viel mehr:

- Es gibt verschiedene Familien von Relevanzlogiken, teilweise axiomatisierbar in FL
- Es gibt noch andere Fuzzy Logiken, welche unabhängig und komplett semantisch motiviert sind. Auch die lassen sich substrukturell axiomatisieren!

Ausblick: Fuzzy Logik

Lukasiewicz Logik ist im Prinzip “klassische” Logik mit $n > 2$ Wahrheitswerten, wobei es auch die Möglichkeit gibt dass $n = \omega$. Wir haben also Wahrheitsfunktionen, es gilt:

$$w(\alpha \wedge \beta) = max(0, w(\alpha) + w(\beta) - 1) \tag{27}$$

Der Pfeil $\rightarrow$ ist definiert als Residuum, und wir bekommen:

$$w(\alpha \rightarrow \beta) = min(1, (1 - w(\alpha)) + w(\beta)) \tag{28}$$

(atomare Propositionen können beliebige Wahrheitswerte in $[0, 1]$ annehmen)

Ausblick: Fuzzy Logik substrukturell

Wir bekommen Lukasiewicz Logik mit folgenden Axiomen:

1. $(\alpha \bullet \beta) \to (\beta \bullet \alpha)$ (Kommutativität)
2. $(\alpha \bullet \beta) \to (\alpha)$ (Schwächung)
3. $((\alpha \to \beta) \to \beta) \leftrightarrow (\alpha \vee \beta)$

Dieses letzte Axiom ist eine Generalisierung der doppelten Negation

$$\neg\neg\alpha \leftrightarrow \alpha \tag{29}$$

und stellt die Wahrheitsfunktionalität sicher!

Zusammenfassung

Substrukturelle Logik ist (womöglich) das coolste überhaupt!