Kategorialgrammatik – ein Überblick

Kilian Evang, Christian Wurm

Düsseldorf, 13.10.2022

Die vielen Kategorialgrammatiken

Man kann Kategorialgrammatiken auf verschiedene Arten motivieren:

1. Als seltsame Grammatiken – Varianten von CFG
2. Als seltsame Logiken
3. Als seltsame Typentheorien
4. Als Beschreibung einer seltsamen Algebra
5. Als seltsame Operationen auf formalen Sprachen

Warum sollte man CGs also behandeln? Eine besondere Strke ist die Nhe von Syntax und Semantik. Dadurch dass CG logisch und typentheoretisch motiviert sind, ist es ein kleiner Schritt vom syntaktischen zum semantischen Typ.

Von CFG zu CG

Nehmen wir eine Regel der Form

$$S \to NP \; VP \tag{1}$$

$$NP \to \texttt{Peter} \tag{2}$$

$$VP \to \texttt{schläft} \tag{3}$$

Sprich: ein Satz besteht/kann bestehen aus einer Verkettung: $NP \cdot VP$ etc.

Kategorialgrammatiken machen nun einen ganz einfachen Schritt: Die Information wandert aus der **Regel** in die **Kategorie**, sprich:

Wenn eine VP verkettet wird mit einer NP, ergibt Sie einen Satz.

Eine VP ist etwas, was links eine NP nimmt, und einen Satz ergibt. Also:

$$VP \mapsto NP \backslash S$$

Von CFG zu CG

$$VP \mapsto NP\backslash S$$

Lies: NP unter S bedeutet: wenn ich links von mir eine NP habe, ergebe ich ein S. Unsere Grammatik sieht dann wie folgt aus:

$$\texttt{Peter} := NP \tag{4}$$

$$\texttt{schläft} := NP\backslash S \tag{5}$$

Regeln:

$$X\ X\backslash Y \Rightarrow Y \tag{6}$$

$$Y/X\ X \Rightarrow Y \tag{7}$$

Wir haben also nur **zwei universelle** syntaktische Regeln – alle andere Information steckt in den Kategorien, die lexikalitschen Elementen zugewiesen werden. Deswegen Kategorialgrammatik.

Von CFG zu CG

Eine Ableitung sieht dann so aus:

...

Aber warum ist das interessant? Naja, ein paar Beispiele können das illustrieren.

Von CFG zu CG

Beispiel 1: unsere Übersetzung war nicht so eindeutig wie es scheint. Möglich wäre auch:

$$\begin{aligned} \texttt{Peter} &:= S/VP \quad (8) \\ \texttt{schläft} &:= VP \quad (9) \end{aligned}$$

Beispiel 2: es gibt aber noch viel mehr Möglichkeiten; z.B.

$$\begin{aligned} \texttt{Peter} &:= S/(NP\backslash S) \quad (10) \\ \texttt{schläft} &:= NP\backslash S \quad (11) \end{aligned}$$

Man nennt das denn **gehobenen Typen**. Hier wirds dann logisch.

Von Logik zu CG

Betrachten wir die logische Perspektive. Eine fundamentale Regel jeder Logik ist Modus Ponens

$$\frac{\beta \to \alpha, \beta}{\alpha}\ MP \tag{12}$$

Die Reihenfolge von $\beta \to \alpha, \beta$ spielt hier keine Rolle, man denkt sich die Prämisse als **Menge**.

Nun denken wir uns die Prämissen als eine **nicht-kommutative Sequenz**. Auf einmal brauchen wir **zwei Implikationen** $\to, \leftarrow$, und **zwei Inferenzregeln**:

$$\frac{\beta,\ \beta \to \alpha}{\alpha}\ MP1 \qquad \frac{\alpha \leftarrow \beta,\ \beta}{\alpha}\ MP2 \tag{13}$$

Von Logik zu CG

Betrachten wir die logische Perspektive. Eine fundamentale Regel jeder Logik ist Modus Ponens

$$\frac{\beta \to \alpha, \beta}{\alpha}\ MP \tag{14}$$

Die Reihenfolge von $\beta \to \alpha, \beta$ spielt hier keine Rolle, man denkt sich die Prämisse als **Menge**.

Nun denken wir uns die Prämissen als eine **nicht-kommutative Sequenz**. Auf einmal brauchen wir **zwei Implikationen** $\to, \leftarrow$, und **zwei Inferenzregeln**:

$$\frac{\beta,\ \beta \to \alpha}{\alpha}\ MP1 \qquad \frac{\alpha \leftarrow \beta,\ \beta}{\alpha}\ MP2 \tag{15}$$

Von Logik zu CG

Und da sind wir schon:

$$\alpha \to \beta \quad \text{entspricht} \quad \alpha\backslash\beta \tag{16}$$
$$\beta \leftarrow \alpha \quad \text{entspricht} \quad \beta\backslash\alpha \tag{17}$$
$$\tag{18}$$

Also ist eine Kategorialgrammatik nichts als eine Logik

- in der Prämissen Sequenzen sind statt Mengen
- die also zwei Implikationen und zwei MP hat
- aber sonst nix (logisches) –
- dazu kommt ein nicht-logisches Lexikon (`Wort`:= Kategorie)

Warum ist das interessant?

Von Logik zu CG

Beispiel 1: betrachten wir einmal eine Logik mit nur (einer) Implikation. Auch hier passiert so einiges was nicht ganz trivial ist:

Transitives Schließen: $\dfrac{\alpha \to \beta,\;\; \beta \to \gamma}{\alpha \to \gamma}$

Anhebung: $\dfrac{\alpha}{(\alpha \to \beta) \to \beta}$

Und noch mehr...was passiert wenn wir diese Inferenzen auf Grammatiken (Lexika) loslassen?

Von Typentheorie zu CG

Erinnern wir uns an einfache (Church/Curry) Typentheore:

- *Typ*$= \{m_1, m_2 ...\}$ ist eine Menge von atomaren Typen. Jeder atomare Typ denotiert eine Menge $\|m_1\|$
- Falls α, β Typen sind, dann ist $\alpha \rightarrow \beta$ ein Typ. Solche Typen denotieren Funktionen: $\|\alpha \rightarrow \beta\|$ ist die Menge aller Funktionen $f : \|\alpha\| \rightarrow \|\beta\|$
- $\alpha \rightarrow \beta$ α ist dementsprechend vom Typ β, und denotiert $\|\beta\|$

Eine Kategorie α/β kann nun genau als ein solcher Funktions-Typ aufgefasst werden – mit dem Unterschied das die Reihenfolge Funktor/Argument zählt!

- Das ist interessant weil kompositionale Semantik meist auf Typentheorie basiert, und in CGs die Typen also bereits eingebaut sind. Das macht die Schnittstelle Syntax-Semantik sehr transparent.

Von Algebra zu CG

$$\frac{4}{5} \cdot 5 = 4 \tag{19}$$

Allgemein:

$$\frac{x}{y} \cdot y = x \tag{20}$$

Man kann das wissen, man kann (20) aber auch als *Defition* der Operation $\frac{-}{-}$ lesen:
$\frac{x}{y}$ ist das eindeutige Element, welches mit y multipliziert x ergibt.
Man kann das noch anders definieren:

Residuum

$\frac{x}{y}$ ist das größte Element, welches mit y multipliziert kleiner gleich x ist.

Von Algebra zu CG

Residuum

$\frac{x}{y}$ ist das größte Element, welches mit y multipliziert kleiner gleich x ist.

Diese Definition hat einen großen Vorteil: sie ist definiert auch wenn der "klassische Bruch" undefiniert ist. Z.B. gilt in Arithmetik $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$

$$\frac{13}{3} = 4 \tag{21}$$

(laut der Definition des Residuums!)

Von Algebra zu CG

Betrachten wir Boolesche Algebren:

Residuum

$y \Rightarrow x$ ist das größte Element, welches mit y in Konjunktion kleiner gleich x ist, formaler: $z \leq y \rightarrow x$ gdw. $z \wedge y \leq x$.

Was wäre dieses Element? Antwort:

$$y \Rightarrow x = \overline{y} \vee x \tag{22}$$

genauso wie in klassischer Logik

$$\beta \rightarrow \alpha \equiv \neg\beta \vee \alpha \tag{23}$$

Wir sehen, der arithmetische Bruchstrich entspricht der logischen Implikation!

Von Algebra zu CG

Nun etwas allgemeiner. Sei $(M, \cdot, \leq)$ eine geordnete Halbgruppe ($\cdot$ assoziativ, sonst nix, insbesondere $a \cdot b \neq b \cdot a$). Dann haben wir zwei Residua a/b, $b\backslash a$, und das Gesetz der Residuierung lautet:

$$a \leq c/b \text{ gdw. } a \cdot b \leq c \text{ gdw. } b \leq a\backslash c$$

Man sich das z.B. als Handlung vorstellen: c/b ist die minimale Aktion, die ich machen muss, damit falls noch jemand Handlung b ausführt, die Handlung c ausgeführt wurde. (Das ist etwas verwirrend wegen $\leq$)

Residuierte Strukturen sind das algebraische Gegenstück zu kategorialen Grammatiken/Logiken.

Von formalen Sprachen zu CG

Das bringt uns gleich zum nächsten Beispiel. Man nehme die geordnete Halbgruppe $(\wp(\Sigma^*), \cdot, \subseteq)$. Also die Halbgruppe der formalen Sprachen über Σ. Dann ist

$$L/M = \{w \in \Sigma^* : \text{ falls } v \in M, \text{ dann } wv \in L\} \tag{24}$$

$$M\backslash L = \{w \in \Sigma^* : \text{ falls } v \in M, \text{ dann } vw \in L\} \tag{25}$$

$$\tag{26}$$

Die Halbgruppe ist also residuiert; ein wichtiges Ergebnis (für uns) ist z.B. dass auch die Klasse der kontextfreien Sprachen geschlossen ist unter Residuum.

Von formalen Sprachen zu CG

Das Residuum L/M hängt natürlich eng mit der Frage zusammen:

> *Welcher formalen Sprache (in einer Kategorialgrammatik) kann man die Kategorien $C_1, C_2, C_1/C_2$ zuweisen?*

Auch hier zeigt sich der Formalismus als informativ für die inhärente (also Grammatikunabhängige Struktur von Sprachen!.

Zusammenfassung

Kategorialgrammatiken sind superspannend!

Ende

Soviel zum Überblick!