# Einführung in die Computerlinguistik

## Finite State Automata (Endliche Automaten)

Laura Kallmeyer

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Summer 2022

# Automaten (1)

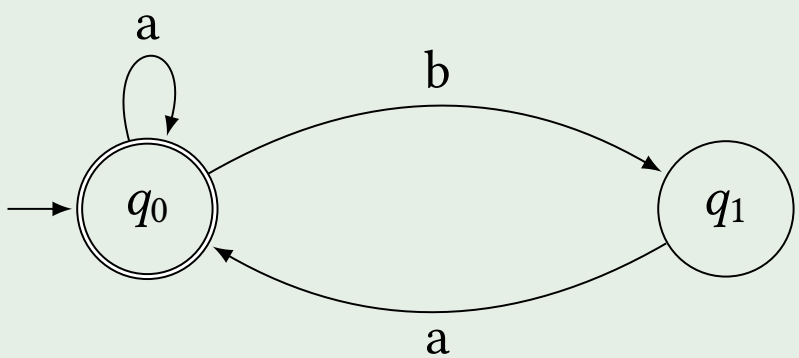
Automaten

- haben in der Regel Zustände, darunter einen Startzustand und Endzustände;
- verarbeiten eine Eingabe;
- durchlaufen bei Verarbeitung der Eingabe verschiedene Zustände;
- haben eventuell eine Ausgabe;
- akzeptieren Eingaben, die zu einem Endzustand führen.

# Automaten (2)

## Beispiel FSA

Automat, der Wörter über $\{a, b\}$ akzeptiert, bei denen jedes $b$ notwendig von einem $a$ gefolgt ist.




- Zustände $q_0$, $q_1$. $q_0$ ist Start- und Endzustand.
- Übergänge in $q_0$: falls ein $a$ gelesen wird, bleibt man in $q_0$; falls ein $b$ gelesen wird, wechselt man in $q_1$;
- Übergänge in $q_1$: man kann als nächstes nur ein $a$ verarbeiten und geht dabei wieder in $q_0$.

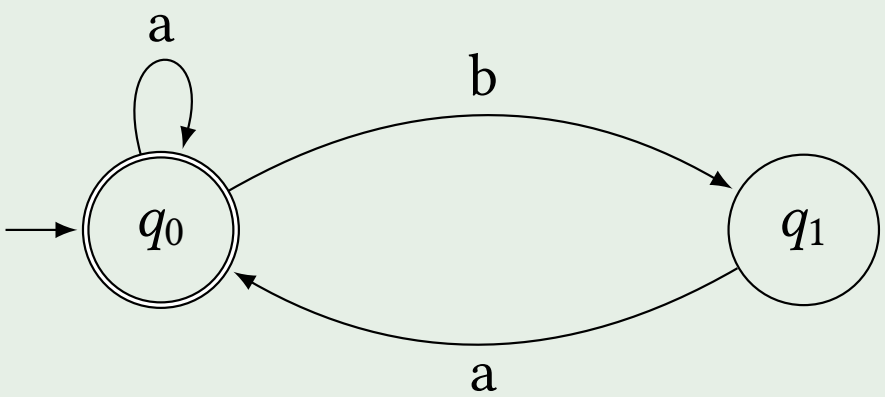
# DFA (1)

A deterministic finite state automaton (DFA) $M$ is a quintuple $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ such that

- $Q$ is a finite set of states.
- $\Sigma$ is a finite set, the input alphabet.
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ is a partial function, the transition function.
- $q_0 \in Q$ is the initial state.
- $F \subseteq Q$ is the set of final states.

# DFA (2)

## Beispiel: DFA als Graph und als Tupel




DFA $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ mit

- $Q = \{q_0, q_1\}$ ($q_0$ Startzustand),
- $F = \{q_0\}$,
- $\Sigma = \{a, b\}$ und
- $\delta(q_0, a) = q_0$, $\delta(q_0, b) = q_1$,
  $\delta(q_1, a) = q_0$, $\delta(q_1, b)$ nicht definiert.

# DFA (3)

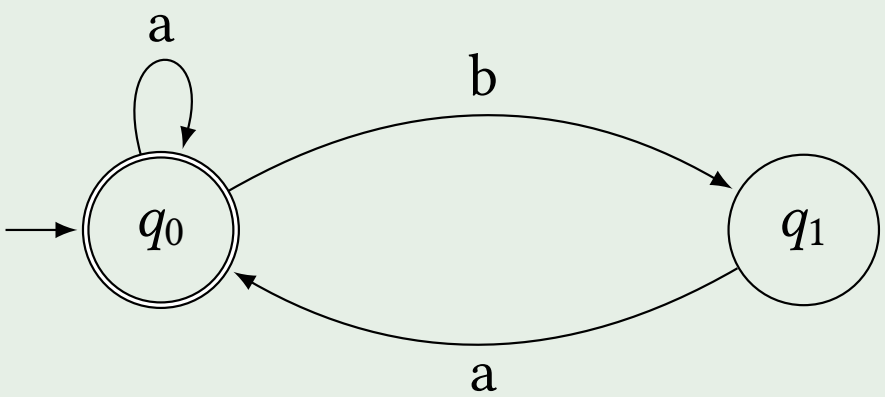
Die Hülle der Übergangsfunktion, $\hat{\delta}$, beschreibt für einen Zustand $q$ und eine Eingabe $w \in \Sigma^*$, in welchen Zustand man, ausgehend von $q$, nach Verarbeiten von $w$ gelangt.

The transition closure of $\delta$ is its reflexive transitive closure:
Let $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ be a DFA. We define its transition closure $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$ as follows:

- $\hat{\delta}(q, \varepsilon) := q$ for all $q \in Q$.
- $\hat{\delta}(q, wa) := \delta(\hat{\delta}(q, w), a)$ for all $a \in \Sigma$, $w \in \Sigma^*$.

# DFA (4)

## Beispiel: $\hat{\delta}$




- $\hat{\delta}(q_0, aaba) = q_0$
- $\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = q_0$
- $\hat{\delta}(q_1, aab) = q_1$
- $\hat{\delta}(q_1, b)$ ist nicht definiert.

# DFA (5)

Die akzeptierte Sprache sind alle Wörter, die erlauben, von $q_0$ in einen Endzustand zu gelangen.

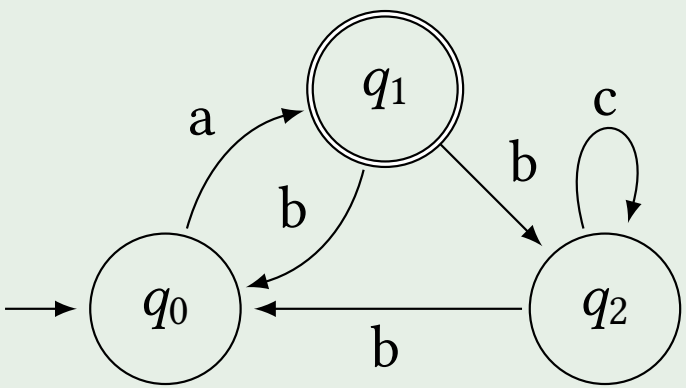
The language accepted by a DFA $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ is

$$L(M) := \{w \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F\}$$

# NFA (1)

Ein endlicher Automat ist nicht-deterministisch, wenn es die Übergangsfunktion nicht eindeutig ist. D.h., es gibt Zustände, von denen aus bei Verarbeitung eines Eingabesymbols mehrere Zustände erreicht werden könnten.

## Nicht-deterministischer Automat




Sprache: $a(ba|bc^*ba)^*$

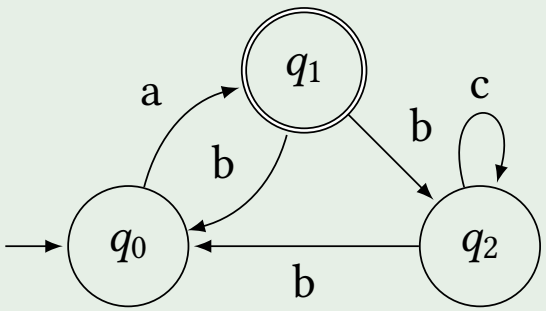
# NFA (2)

A finite state automaton is non-deterministic if the transition function is not deterministic:
A non-deterministic finite state automaton (NFA) $M$ is a quintuple $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ such that

- $Q$, $\Sigma$, $q_0$ and $F$ are like in a DFA.
- $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$ is the transition function (where $\mathcal{P}(Q)$ is the powerset of $Q$).

# NFA (3)

## Nicht-deterministischer Automat




Übergangsfunktion:

$\delta(q_0, a) = \{q_1\}$ $\quad$ $\delta(q_2, c) = \{q_2\}$

$\delta(q_1, b) = \{q_0, q_2\}$ $\quad$ $\delta(q_2, b) = \{q_0\}$

In allen anderen Fällen ist der Wert $\emptyset$.

# NFA (3)

$\hat{\delta}$, beschreibt für einen Zustand $q$ und eine Eingabe $w \in \Sigma^*$, in welchen Zustände man, ausgehend von $q$, nach Verarbeiten von $w$ gelangen kann.

Let $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ be a NFA. We define its transition closure $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$ as follows:

- $\hat{\delta}(q, \varepsilon) := \{q\}$ for all $q \in Q$.
- For all $a \in \Sigma$, $w \in \Sigma^*$:
  $\hat{\delta}(q, wa) := \{p \mid \text{ there is a } r \in \hat{\delta}(q, w) \text{ such that } p \in \delta(r, a)\}$.

## Beispiel $\hat{\delta}$ bei NFA

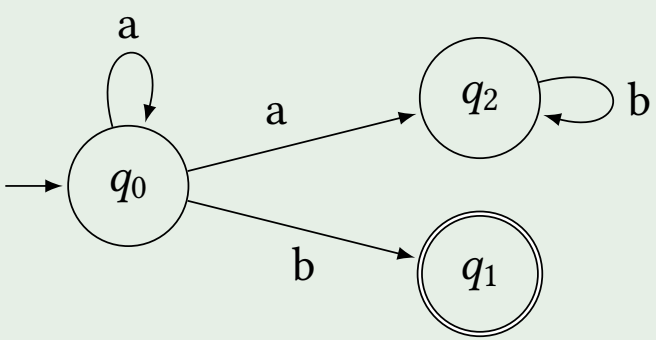
(Automat s. vorherige Folie):

- $\hat{\delta}(q_0, ab) = \{q_0, q_2\}$,
- $\hat{\delta}(q_0, abca) = \emptyset$

# NFA (3)

- $\hat{\delta}(q, \varepsilon) := \{q\}$ for all $q \in Q$.
- For all $a \in \Sigma$, $w \in \Sigma^*$:
  $\hat{\delta}(q, wa) := \{p \mid \text{ there is a } r \in \hat{\delta}(q, w) \text{ such that } p \in \delta(r, a)\}$.

## Weiteres Beispiel: $\hat{\delta}$ bei NFA




$\hat{\delta}(q_0, ab) = \{p \mid \text{ there is a } r \in \hat{\delta}(q_0, a) \text{ such that } p \in \delta(r, b)\}$
$\hat{\delta}(q_0, a) = \{q_0, q_2\}$
$\hat{\delta}(q_0, ab) = \delta(q_0, b) \cup \delta(q_2, b) = \{q_1\} \cup \{q_2\} = \{q_1, q_2\}$.

# NFA (4)

Die Sprache des NFA ist die Menge aller Wörter, die erlauben, ausgehend von $q_0$ einen Endzustand zu erreichen.

The language accepted by a NFA $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ is

$$L(M) := \{w \mid \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

# Equivalence of DFA and NFA (1)

The following holds:
Let $L$ be a language. There is a DFA $M$ such that $L = L(M)$ iff there is a NFA $M'$ such that $L = L(M')$.

The "$\Rightarrow$" direction of the iff is obvious: Each DFA can be written as a NFA by

(i) replacing $\delta(q_1, a) = q_2$ with $\delta(q_1, a) = \{q_2\}$, and

(ii) adding $\delta(q_1, a) = \emptyset$ for all cases where $\delta(q_1, a)$ is undefined in the original automaton.

# Equivalence of DFA and NFA (2)

For the "$\Leftarrow$" direction, we need to show how to construct an equivalent DFA for a given NFA.

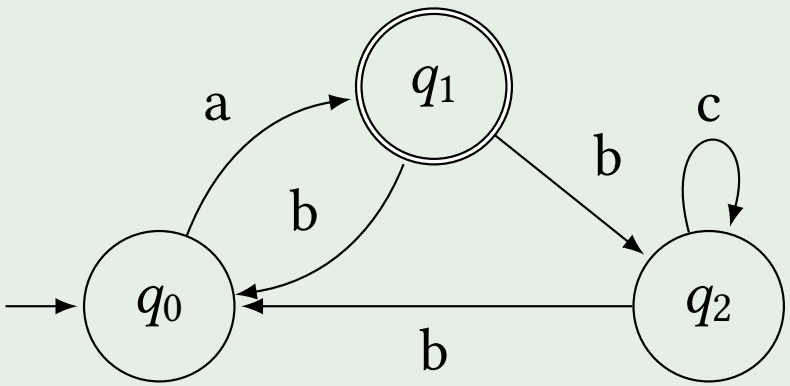
For this, we need to do two things:

1. Give the construction algorithm.
2. Prove that the resulting DFA accepts the string language of the original NFA.

Proofs of this type are called construction proofs.

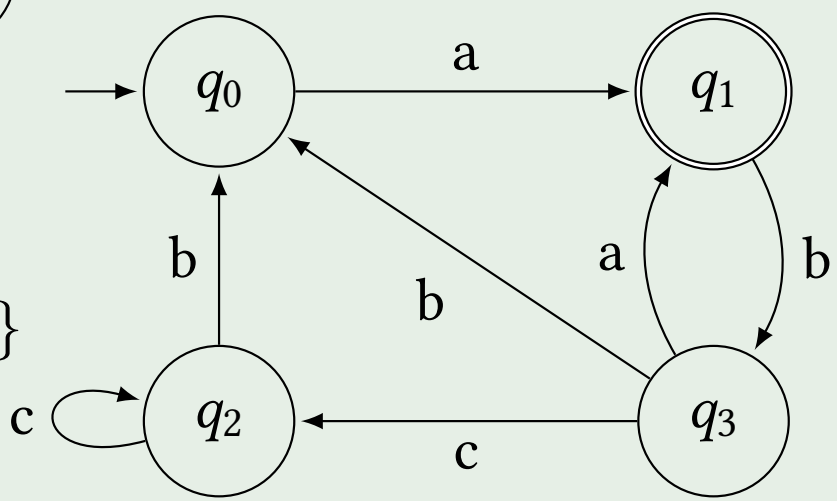
# Equivalence of DFA and NFA (3)

Idea of the construction: In the new DFA, the states are subsets of the state set $Q$ of the NFA. A state contains all $q \in Q$ that are reachable with the same input word.




neue Zustände:

$q_0 = \{q_0\}, q_1 = \{q_1\},$
$q_2 = \{q_2\}, q_3 = \{q_0, q_2\}$



# Equivalence of DFA and NFA (4)

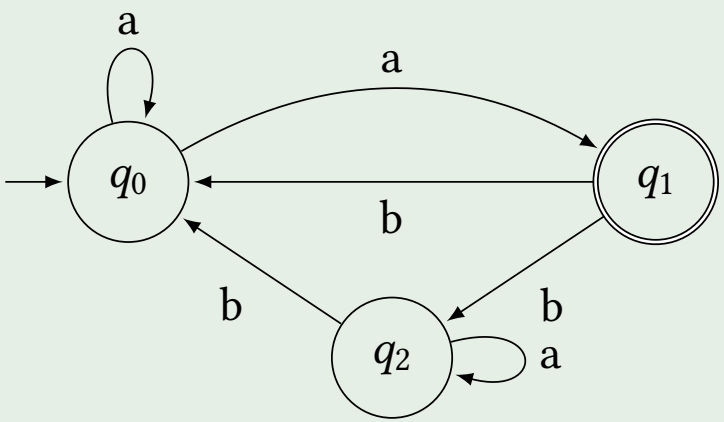
Let $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ be an NFA. We construct an equivalent DFA $M' = \langle Q', \Sigma, \delta', q_0', F' \rangle$ as follows:

- $Q' := \mathcal{P}(Q)$.
- $q_0' := \{q_0\}$.
- $\delta'(Q_1, a) := \bigcup_{q \in Q_1} \delta(q, a)$.
- $F' := \{Q_f \subseteq Q \mid Q_f \cap F \neq \emptyset\}$.

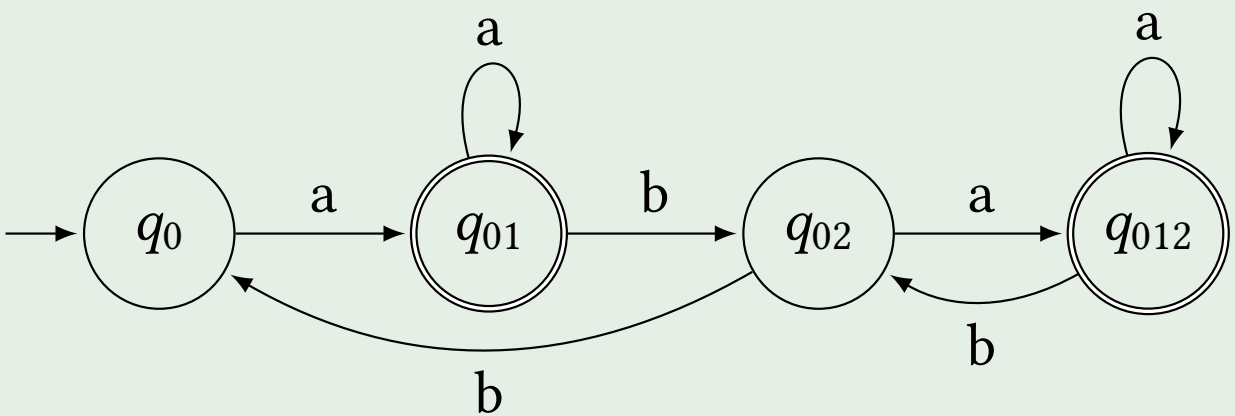
After having read the input $w$, the automaton is in a state $Q_w \subseteq Q$ such that, in the original NFA, $\hat{\delta}(q_0, w) = Q_w$.

# Equivalence of DFA and NFA (5)

## From NFA to DFA




equivalent DFA:

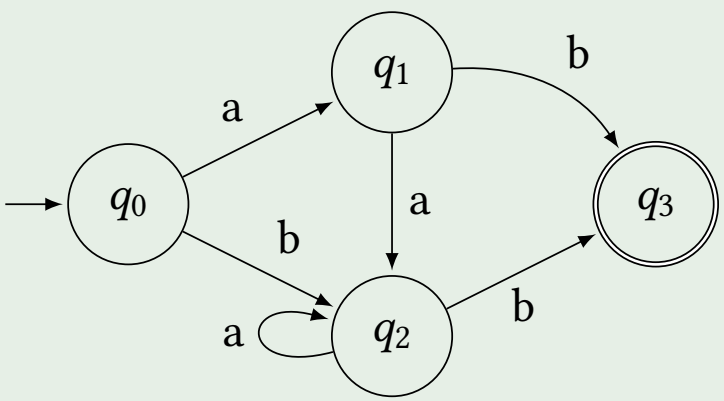


# Minimizing DFAs (1)

Ein DFA kann eindeutig durch folgende Äquivalenzrelation minimiert werden:
$p \sim q$ genau dann wenn für alle $w$ gilt: $\hat{\delta}(p, w) \in F$ gdw. $\hat{\delta}(q, w) \in F$.
Die Äquivalenzklassen $[q]$ bilden dann die Zustände, und für die neue Übergangsfunktion $\delta'$ gilt $\delta'([q], a) = [\delta(q, a)]$.

Mit anderen Worten: Zustände, die die gleiche Sprache definieren, werden als äquivalent zusammengefasst.

## Minimierung: einfaches Beispiel




$q_1 \sim q_2$

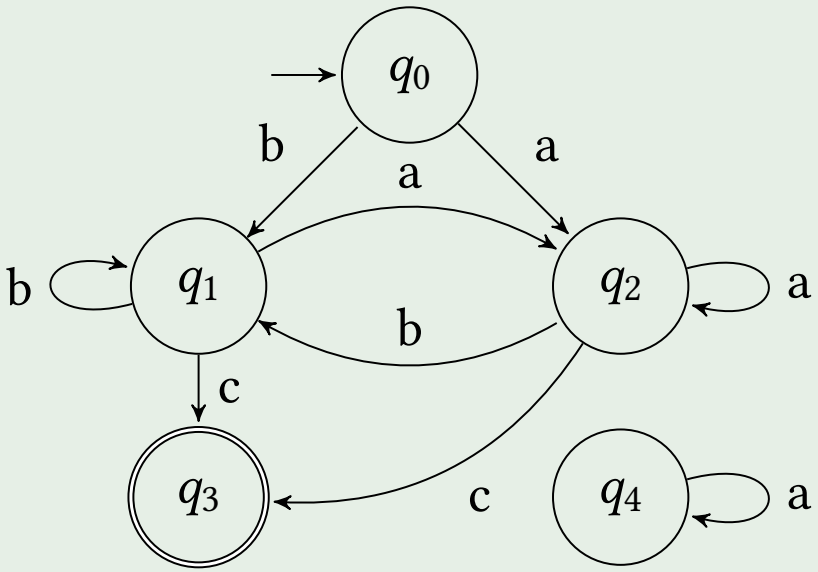
# Minimizing DFAs (2)

Algorithmus für die Berechnung der Äquivalenzklassen:

1. Entferne alle nutzlosen Zustände (nicht erreichbar oder zu keinem Endzustand führend).
2. Partitioniere $Q$ in $\mathcal{Q} = \{F, Q \setminus F\}$.
3. Für jedes Eingabesymbol $a$ zerlege die Mengen in $\mathcal{Q}$ sukzessive weiter, so dass es anschließend für alle $Q' \in \mathcal{Q}$ ein $Q'' \in \mathcal{Q}$ gibt mit $\hat{\delta}(q', a) \in Q''$ für alle $q' \in Q'$.
   Anders gesagt: aus einem $Q' \in \mathcal{Q}$ bleiben nur die Zustände in einer Menge, die nach Verarbeitung von $a$ in ein und dieselbe Menge $Q'' \in \mathcal{Q}$ führen.
4. Wiederhole 3. so lange, bis sich $\mathcal{Q}$ nicht mehr verändert.

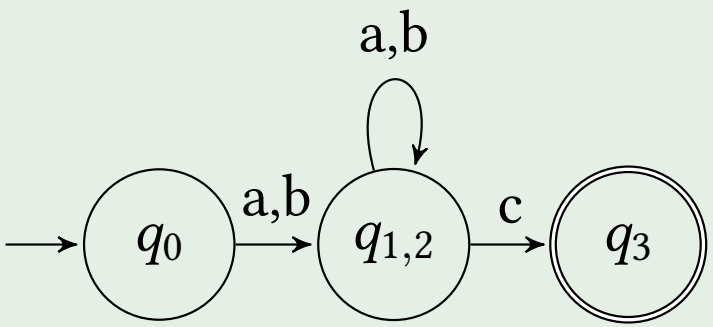
Der neue Startzustand ist $[q_0]$, Endzustände sind alle $[q_f]$ mit $q_f \in F$.

# Minimizing DFAs (3)




entferne $q_4$ (nutzlos)
Start: $\{q_3\}$ $\{q_0, q_1, q_2\}$
$a$, $b$: trennen nicht
$c$: $\{q_3\}$ $\{q_0\}$ $\{q_1, q_2\}$
keine weitere Trennung

Ergebnis:

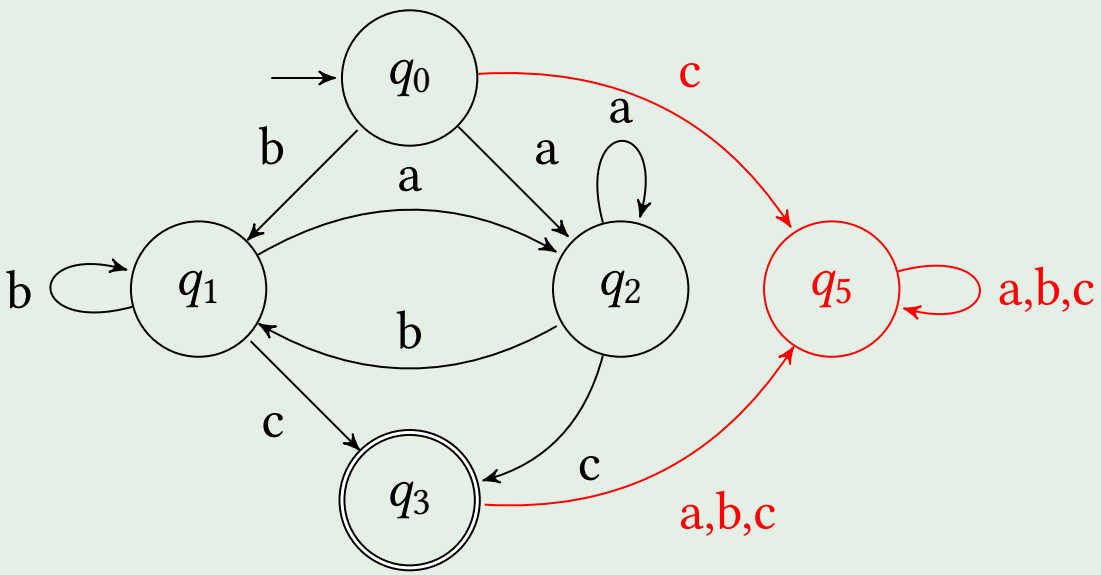


# Minimizing DFAs (4)

Einfacher Algorithmus, der berechnet, welche Zustände in einer Äquivalenzklasse sind:

1. Entferne nutzlose Zustände.
2. Ergänze den DFA zu einem vollständigen DFA durch Hinzufügen eines Fehlerzustands (trap state).

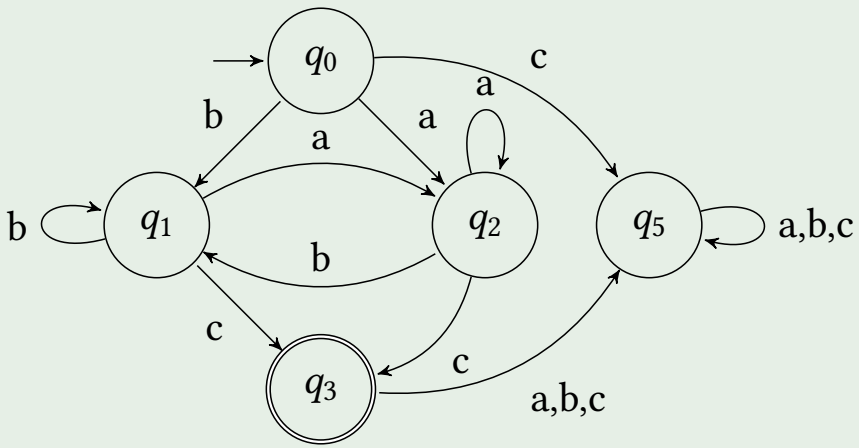
## Example: trap state



# Minimizing DFAs (5)

3. Bilde eine $(|Q| - 1) \times (|Q| - 1)$ Matrix, deren Spaltenindizes alle Zustände außer dem letzten und deren Zeilenindizes alle Zustände außer dem ersten, in umgekehrter Reihenfolge, durchlaufen.
4. Ein X in einem Feld der Matrix bedeutet, dass die beiden Zustände, die die Indizes dieses Feldes bilden, nicht in einer Äquivalenzklasse sein können. Beginne damit, alle Felder mit *genau einem* Endzustand mit X zu füllen. (Sie können wegen $\varepsilon$ nicht in einer Klasse sein.)

# Minimizing DFAs (6)

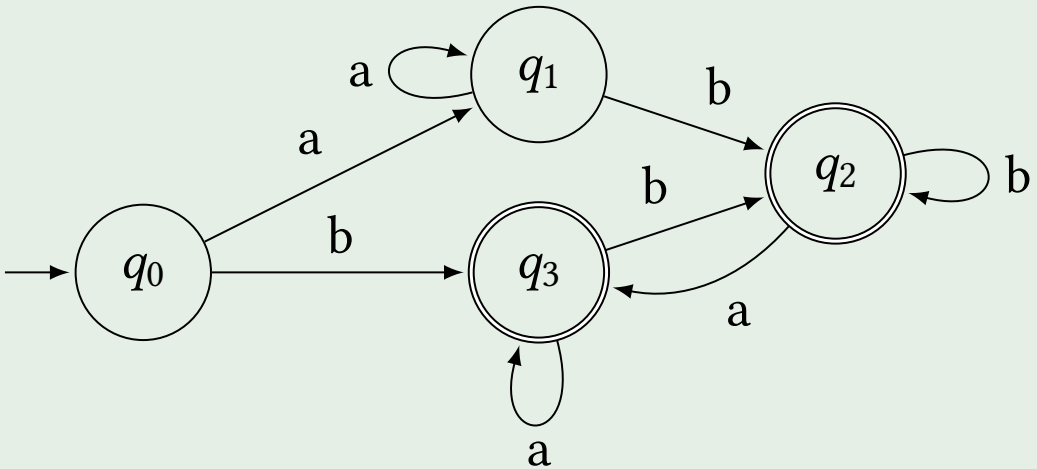



| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 5 | X | X | X | X |
| 3 | X | X | X | |
| 2 | X | | | |
| 1 | X | | | |

5. Durchlaufe die noch nicht markierten Felder wiederholt, bis sich die Matrix nicht mehr ändert und führe für jedes Feld mit Indizes $\langle p, q \rangle$ folgendes durch:
   Gibt es ein Eingabesymbol $a$, so dass das Paar $\langle \delta(p, a), \delta(q, a) \rangle$ (oder umgekehrt) markiert ist, so markiere auch das Feld $\langle p, q \rangle$.
6. Freie Felder sagen uns anschließend, welche Zustände äquivalent sind.

# Minimizing DFAs (7)

## Weiteres Bsp.: Minimierung




FSA vollständig,
kein Trap-State nötig

Matrix für Minimierung:

| | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 3 | x | x | |
| 2 | x | x | |
| 1 | | | |

Neuer Automat: